Leere und mehrdeutige Namen in der klassischen Prädikatenlogik

Esther Tamm

Inaugural-Dissertation

München ~~1984~~ 1983

Leere und mehrdeutige Namen

in der klassischen Prädikatenlogik

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophie
an der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von

Esther Tamm
aus
Kirchheim/N

1983

Referent: Prof. Dr. M. Drömmer
Korreferent: Prof. Dr. G. Link
Tag der mündlichen Prüfung: 16.2.1983

I N H A L T

Einleitung und intuitive Zusammenfassung.....1

0. Klassische Prädikatenlogik 1. Stufe 20

00. Namen 25

Namenwörter und Ausdruckssysteme

leere und mehrdeutige Namen

Extensionsgleichheit

NAMEN INDER KLASSISCHEN LOGIK 33

1.Syntaktische Festlegungen mithilfe von Namen 34

syntaktisch adäquate Sprachen, Kalküle,Semantiken

für syntaktische Festlegungen mithilfe von Namen

2. Semantische Festlegungen mithilfe von Namen 39

Interpretationen mithilfe von Namen

2.1 Adäquatheit von semantischen Festlegungen für

Interpretationen mithilfe von Namen 40

zielinvariante Interpretationen, zielextensionale

Interpretationssemantik

2.1.1 Klassische Interpretationssemantik 41

2.1.2 Nichtklassische Interpretationssemantik

intuitive Varianten und ihre Zielextensionalität..44

2.2 Quasiadäquatheit der klassischen Interpretationssemantik.48

Quasiextensionalität und leere und mehrdeutige Namen

2.3 Vollständigkeit und Zuverlässigkeit unter

nichtklassischen Interpretationssemantiken 52

3. Klassischer Kalkül mit Identität 59

3.1 Klassische Festlegungen 59

3.2 Interpretationen mithilfe von Namen 61

3.3 Interpretationssemantiken, Zielextensionalität,

Zuverlässigkeit 62

Literatur.....69

Formale Zusammenfassung.....70

Einleitung und intuitive Zusammenfassung

Ich möchte in dieser Arbeit zeigen, daß entgegen der üblichen Auffassung sowohl leere als auch mehrdeutige Namen in formalen Systemen der 2-wertigen Logik zulässig sind.
Ich möchte zunächst die Notwendigkeit einer grundsätzlich anderen Bearbeitung dieser Frage begründen und zeigen, daß intuitive Vorstellungen von formalen Festlegungen schärfer getrennt werden müssen und können. Dabei wird sich zeigen, daß die Existenzberechtigung der Free Logic zumindest eine offene Frage ist. In diesen Vorbemerkungen soll Hintergrund und Argumentation der Arbeit erläutert werden.
Mit der Quine'schen Unterscheidung von Vorkommen und Verwendung von Namen angewendet auf die Prädikatenlogik werde ich die Verwendbarkeit von extensional beliebigen Namen vor einen neuen Hintergrund stellen. Zunächst werde ich zeigen, inwiefern mir Quines Kriterium (für die Verwendung) inadäquat scheint. Stattdessen werde ich eine Adäquatheitsbedingung für die prädikatenlogische Theorie aufstellen, dafür, daß dort vorkommende Namen extensional verwendet werden. Es wird eine Bedingung an ein System der Prädikatenlogik sein, nicht mehr eine Kritik einzelner Formeln. Meiner Ansicht nach kann erst mithilfe einer Forderung an das ganze System überhaupt untersucht werden, ob und welche Namen in der klassischen Logik problematisch sind. Die leeren und mehrdeutigen Namen jedenfalls scheinen nicht das Problem zu sein.

I.Das Kernproblem und eine Kritik klassischer Ansätze

Die klassische Logik als formales System kann nur an Forderungen gemessen werden, die das formale System als ganzes prüfen, weil nur das System als ganzes die Bedeutung von Formeln und Zeichen festlegt. Damit ist auch die Kernfrage dieser Arbeit, die Frage der dort verwendbaren Namen bzw die These von der Unzulässigkeit irgendwelcher Namen nur mit einer noch zu formulierenden Adäquatheitsforderung an ein Logik-System als ganzes begründbar.
Die These von der Nichtverwendbarkeit leerer Namen in klassischen Systemen der 2-wertigen Logik (die These der Free Logic), aber auch die weitergehende These, wonach nur eindeutige Namen im Rahmen klassischer Systeme verwendbar sind, haben weitgehende Konsequenzen:
1.wenn die klassischen Systeme die Existenz nichtleerer Namen voraussetzen, sind diese grundlegenden Systeme für Argumentationsstrukturen an eine (nichtsprachlich) empirische Voraussetzung gebunden, nämlich daran, daß ein Gegenstand existiert.
2.Wenn nur eindeutige Namen zulässig sind, ist eine wissenschaftliche Argumentation nur auf (klassisch-)logische Korrektheit überprüfbar, wenn die Eindeutigkeit aller vorkommender Namen gesichert ist. Also Argumentationen

über Homer oder den Schneemenschen entzögen sich der (logischen) Überprüfbarkeit.

Wenn also die These von der Nichtverwendbarkeit leerer oder aber mehrdeutiger Namen richtig wäre, bestände aus diesen beiden Gründen dringende Notwendigkeit für ein neues System, daß allerdings neben leeren auch mehrdeutige Namen zulassen müßte. Ein System, in dem leere Namen zulässig sind, soll die Free Logic sein.

Free Logic und ihre Existenzberechtigung. Mit sogenannten Free-Logic-Systemen oder Logic-of-Existence-Systemen hat eine Gruppe von Logikern für sich den Anspruch erhoben, Systeme für den (ihrer Ansicht nach im Rahmen der klassischen Logik unmöglichen) formallogischen Umgang mit leeren Namen formuliert zu haben.

Diese Systeme sind Varianten des klassischen, prädikatenlogischen Kalküls. Ihr Hauptcharakteristikum ist die einschränkende Modifikation der Existenzgeneralisierung. Sie erheben den Anspruch einen Mangel der klassischen, formallogischen Systeme zu beseitigen: den Mangel der Nichtverwendbarkeit leerer Namen. Ich behaupte, daß die neuen Systeme nicht notwendig sind, weil das klassische System diesen Mangel nicht hat.

Leblancs Argument. Aus den Anfangszeiten der Free Logic findet sich bei Hugues Leblanc folgende typische Kritik an der klassisch-üblichen Existenzgeneralisierungsregel: "Die Überzeugung für die Entwicklung der Free Logic basiert auf der Vorstellung, daß logisch wahre Behauptungen logisch wahr bleiben, wenn einige der singulären Terme durch nichtreferenzielle ersetzt werden, aus dieser Sicht folgt, daß

$Fa \rightarrow \forall x Fx$ (1)

keine logische Wahrheit ist, weil folgende falsche Behauptung diese Form hat:

Wenn Pegasus existiert, dann gibt es etwas, daß nicht existiert. (2)"

(Hugues Leblanc, Truth Value Semantics for a Logic of Existence. Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol XII, Number 2, 1921, S.154)

Diese Argumentation ist vielleicht bei oberflächlicher Betrachtung plausibel, aber:

1. welches ist die logisch wahre Behauptung (die wahr bleiben soll bei der Ersetzung singulärer Terme)? $Fa \rightarrow \forall x Fx$ ist eine Formel oder ein Formelschema und keine Behauptung, also nicht wahr oder falsch. Bezüglich der logischen Wahrheit gilt aber:

2. was logisch wahr ist, wird im Rahmen der formalen Logik definitorisch festgelegt, und zwar relativ zu einer (prädikatenlogischen) Semantik (z.B. wahr unter allen Interpretationen bei der Interpretationssemantik). In den Definitionen ist nicht die Rede davon, daß Aussagen einer 'bestimmten Form' wahr sein sollen, auch wenn diese Intuition irgendwo, irgendwie hinter den

Festlegungen liegt. Diesbezüglich gilt

3.Für den Übergagang von (1) nach (2) ist allein die Semantik zuständig! Für die klassischen Semantiken (Bewertungs- oder Interpretationssemantiken etwa) ist nun aber beweisbar, daß sie genau die ableitbaren Aussagen als logisch wahr auszeichnen (Vollständigkeitssatz). Wenn also (1) klassisch ableitbar ist, kann (2) damit nur entweder logisch wahr sein, oder aber nicht die 'Form' von (1) haben. Falsch kann sie nur sein, wenn der Vollständigkeitsbeweis der klassischen Logik falsch ist!

Diese Kritik zeigt, daß und wie mit intuitiven Vorstellungen von Wahrheit (einer Formel) oder dem Zusammenhang zwischen einer ableitbaren Formel und einer alltagssprachlichen Aussage ("Aussage einer gewissen Form") ohne Rücksicht auf tatsächliche Festlegungen nicht die Inadäquatheit eines formalen Systems gezeigt wird. Die intuitive Kritik an einzelnen Formeln oder Regeln selbst ist inadäquat. Die klassische, formale Logik muß als Theorie kritisiert werden. Ihre Regeln und Festlegungen legen nur zusammen die Bedeutung der vorkommenden Zeichen fest, die des Existenzquantors wie aller anderer Zeichen. Und zwar, und das scheint mir hier wichtig, geschieht das eventuell anders, als es der ursprünglichen Intuition entsprochen haben mag. Nur wenn diese Intuition explizit, in Form einer Adäquatheitsforderung an die Theorie als ganze formuliert wird, kann man eventuell ihre Inadäquatheit zeigen.

Ich behaupte bis jetzt nur, daß die klassische Theorie so nicht abgelehnt werden kann, weil eine Kritik nur Kritik an der Theorie als ganzes sein kann und entsprechend geübt werden muß. Das es der Free Logic nicht um die Formel (1) oder Ihre Ableitbarkeit geht, ergibt sich eigentlich schon trivialerweise daraus, daß sie klassische Systeme in denen (1) nicht auftauchen kann, weil es weder Existenzquantor noch Existenzgeneralisierungsregel gibt, nicht als Systeme ihrer Wahl anerkennt. Solange die Adäquatheitsbedingung für formale Theorien, die nicht von der klassischen, aber der Free Logic erfüllt ist, nicht formuliert ist, bleibt damit die Daseinsberechtigung der Free logic unbegründet oder zumindest eine sehr vage und unklare Sache.

Quines Überprüfungsansatz von Existenzvoraussetzungen einer Theorie. Ich stelle eine an Quine angelehnte Adäquatheitsforderung für die Verwendung extensional beliebiger Namen in der klassischen Logik auf. Diese Forderung wird von der klassischen logischen Theorie erfüllt, ohne daß leere oder mehrdeutige Namen ausgeschloßen werden müßten. Damit ist bezüglich der eingangs erwähnten Problematik der Nichtverwendbarkeit leerer Namen gezeigt, daß

1.die klassische formallogische Analyse auf Argumentationen mit beliebigen

Namen anwendbar ist und
2.daß die Verwendbarkeit leerer Namen (relativ zu meiner Adäquatheitsforderung zumindest) keine Modifikation der klassischen Festlegungen erforderlich macht.
Damit beseitigt die Free Logic also nicht den Mangel der Nichtverwendbarkeit leerer Namen in der klassischen Logik, weil letztere diesen Mangel nicht hat. Ihr Problem ist also ihre eigene Daseinsberechtigung in Abgrenzung gegen die klassische Logik.
Quines klassisch gewordenem Ansatz zum Thema leerer Namen ist ein Verfahren zur Existenzvoraussetzungsanalyse von Theorien. Quine hat damit nicht das Ziel verfolgt zu zeigen, daß in der klassischen Logik leere Namen nicht verwendbar sind. Sein Verfahren ist aber mit ihnen dadurch verbunden, daß es die Existenzvoraussetzungen einer Theorie auf den Nachweis zurückführt, daß innerhalb dieser Theorie Namen verwendet werden, "um ein Objekt zu benennen" (Willard van Orman Quine, Existence and Quantification, in Ontological Relativity and other Essays, Columbia U.P.,N.Y. 1969, S 69), und ein leerer Name kann natürlich nicht verwendet werden um ein Objekt zu benennen. Quine hat also ein Verwendungskriterium für Namen in einer Theorie formuliert.
Wenn Quines Verfahren adäquat ist, haben wir damit
1.ein Verfahren, das wir auf eine prädikatenlogische Theorie anwenden können, und sind damit über die Kritik an einzelner ihrer Formeln hinaus und
2.ein Verfahren, mit dem gezeigt werden könnte, daß dort gewisse oder alle Namen nicht leer sein dürfen, alle die, die zur Benennung eines Objektes (gemäß dem Verfahren) verwendet werden.
Hier möchte ich eine Zwischenbemerkung einschieben. Der Free Logic geht es genauso wie Quine um die Problematik (leerer) singulärer Namen. Ich unterscheide zwei Klassifizierungen von Namen singulär-generell und mehrdeutig-eindeutig-leer:
A.singulär-generell. Mit Lejewski (C. Lejewski, A Theorie of Non-Reflexive Identity and its Ontological Ramifications, in Paul Weingartner (Hrsg), Deskription, Analytizität und Existenz, Salzburg-München 1966, S 65ff) ist das eine Unterscheidung danach, ob ein Name in Ausdrücken vom Typ "a ist ein b" grammatikalisch korrekt an der durch "a" bzw durch "b" angedeuteten Stelle vorkommt.
B.mehrdeutig-eindeutig-leer. Das ist die davon unabhängige Unterscheidung nach der Anzahl von Denotaten (oder Objekten in der Extension) des Namens.
Also können singuläre Namen("George Sand", "Homer", "N.Bourbaki" (unter diesem Pseudonym hat eine Gruppe französicher Mathematiker Arbeiten veröffentlicht)) oder generelle ("Nasenspitze von George Sand", "Schneemensch", "Wissenschaftstheoretikerin") eindeutig, fraglich, leer oder mehrdeutiger

bzgl. der Anzahl ihrer Denotate sein, also entprechend leere, empirisch bezüglich der Klassenzugehörigkeit ungeklärte oder mehrdeutige Namen. Diese Grundvorstellung ist für das Folgende ausreichend.

Quines Kriterium fordert nun zur Überprüfung der Existenzvoraussetzung einer Theorie:

1.die Theorie auf das Vorkommen von singulären (bei Quine "Eigen"-) Namen zu untersuchen,

2.zu untersuchen, ob diese Namen zur Benennung von Objekten verwendet werden (Willard van Orman Quine, aaO, S 93).

Quines Differenzierung von Vorkommen von Namen in einer Theorie und ihrer Verwendung habe ich übernommen und sie ist für meine Arbeit grundlegend. Quines Verwendungskriterium aber erscheint mir nicht adäquat.

Quine behauptet für Theorien mit Identität (also auch ein System der Prädikatenlogik mit Identität): "Wenn die Theorie die existenzquantifizierte Identitätsaussage 'Vx x=a' behauptet ('affirms'), haben wir sicher unsere Antwort: "a" wird verwendet, um ein Objekt zu benennen." (ebd S 94)). Bezüglich Theorien ohne Identität behauptet er: "Existenz ist was die Existenzquantifikation ausdrückt. Es gibt Dinge der Art F genau dann, wenn Vx Fx. Das ist sowenig hilfreich wie unfraglich" (ebd S 97). Meiner Ansicht nach handelt es sich hier nicht um ein Verwendungskriterium für eine prädikatenlogische Theorie in syntaktisch-semantischem Aufbau, und zwar aus folgenden Gründen:

1.Die Prädikatenlogik behauptet nicht "Vx x=a". Sie behauptet eine Ableitbarkeitsbeziehung bei entsprechender Wahl von Grundzeichen.

2.""Vx x=a"" ist Name einer Zeichenreihe (einer Objektsprache). Was soll heißen, die Theorie behauptet "Vx x=a" (eine Zeichenreihe)?

3.Ich verstehe nicht, wie "a" verwendet werden kann, um ein Objekt zu benennen. "a" ist ein Buchstabe (""a"" ist Namen eines Buchstabens, also ""a"" könnte ev. verwendet werden), "a" könnte auch Platzhalter für einen Namen sein, aber nur Namen, weder Platzhalter noch Buchstaben können verwendet werden, um ein Objekt zu benennen. Nichtsdestotrotz ist sowohl "Vx x=a", "Vx x=Pegasus", "Vx x=Bertrand Russel" klassich ableitbar, wenn wir nur die entsprechenden Grundsymbole zur Verfügung stellen.

Wenn also, um ein anderes Beispiel zu wählen (ein sicher leerer Name), die Ableitbarkeit von "Vx x= der quadratische Kreis" die Verwendung von "der quadratische Kreis", um ein Objekt zu benennen, bedingt, wie Quine behauptet, dann müßten wir diesen leeren Namen als Grundzeichen verbieten, aber warum? Warum bedingt die Ableitbarkeit die Verwenddung, um ein Objekt zu benennen?

4.Kann ich das Argument nicht anders sehen, als daß bei der Auswahl von "Vx x=a" als Kriterium, auch Quine (wie Leblanc) auf eine intuitive Vorstellung

von der Bedeutung gewisser isolierter Terme zurückgreift, nicht aber die expliziten Festlegungen heranzieht. So ist ja z.B. seine Behauptung, daß man die symbolische Notation am Anfang mit der Behauptung erklärt, daß Existenz ist, was die Existenzquantifikation ausdrückt, nicht richtig, weil im Allgemeinen das Wort "Existenz" in den Festlegungen gar nicht vorkommt. Zwar kommt "es gibt" zumeist vor, daß aber das dasselbe bedeutet wie "Existenz", müssen zumindest die Free Logic-Anhänger bestreiten. Sie unterscheiden ja zwischen 'Existenzquantor' und Existenzprädikat und formulieren verschiedene Regeln für sie.

5.Wie ich im folgenden zeigen möchte, kann zwischen

a) der Existenz- Eigenschaft, im Sinne der Eigenschaft eines Namens, ein Denotat zu haben oder ein Objekt zu bezeichnen (nichtleerer Name zu sein) und b) der Existenz-Eigenschaft, im Sinne von formaler Existenzgeneralisierbarkeit bzgl eines Namens, unterschieden werden. Letztere basiert allein auf der Substituierbarkeit.

Den Übergang von Vx Fx zu Fa oder Vx x=a zu a=a kann man so verstehen, daß die existenzgeneralisierte Aussage nichts anderes fordert (zur eigenen Ableitbarkeit, um nichts anderes kann es hier gehen) als die Ableitbarkeit der Einsetzungsinstanz. Ob nun aber die Einsetzungsinstanz "Pegasus=Pegasus" oder "Bertrand Russell fliegt nicht" voraussetzt, daß "Pegasus" oder "Bertrand Russell" nichtleere Namen sind, ist eine Frage, eine Frage aber die mit intuitiven Vorstellungen von der =-Relation oder der logischen Prädikation nicht beantwortet wird. Man muß dazu Festsetzungen analysieren und eventuell modifizieren.

Auf die Verträglichkeit der üblichen prädikatenlogischen Festsetzungen mit verschiedenen intuitiven Vorstellungen von Prädikation und Identitätsrelation werde ich noch ausführlich eingehen, auf solche, die Denotate voraussetzen und solche, die es nicht tun, wenn ich auf ihre interpretationssemantischen Wahrheitsbedingungen eingehe. Zusammenfassend möchte ich jetzt nochmal festhalten: der Free Logic -Ansatz basiert auf der Behauptung der Nichtverwendbarkeit leerer Namen in der klassischen Logik. Diese Behauptung ist nur begründet, wenn die Free Logic eine entsprechende Adäquatheitsbedingung für die klassische Logik formuliert und sie als Bestandteil der dahinterliegenden Intuition nachweist.

Quine macht die Existenzvoraussetzung einer Theorie an der Verwendung von Namen, um ein Objekt zu benennen, fest. Er unterscheidet zwischen dem Vorkommen von Namen und ihrer Verwendung in der Theorie. Das Verwendungskriterium selbst aber operiert, genauso wie Leblancs Kritik an der klassischen Logik, wesentlich mit intuitiven Vorstellungen von der Bedeutung einzelner Regeln oder Terme (Existenzgeneralisierung und Identität), basiert

nicht auf der expliziten Analyse konkreter Festsetzungen. Allein diese aber legen die Bedeutung der Terme fest. Eine Analyse solcher Festsetzungen habe ich versucht.

II. Zusammenfassende, intuitive Darstellung meiner Argumentattion

Analyseschritte. Meine Untersuchung der Verwendbarkeit extensional beliebiger Namen in der klassischen Logik durchläuft folgende Stufen:

1. werden singuläre Namen in den syntaktischen und in den semantischen Festsetzungen lokalisiert, einmal als Namen objektsprachlicher Zeichen, einmal als Namen zugeordneter Objekte in Interpretationen.
2. werden verschiedene Adäquatheitsbedingungen in Form von (extensionalen) Verwendungskriterien für diese Namen aufgestellt.
3. untersuche ich, welche Forderungen wir allgemein an die Namen stellen müssen (an eine Menge aller singulären Namen), damit die Verwendungskriterien erfüllt sind. An dieser Stelle entscheidet sich: Leere oder mehrdeutige Namen sind verwendbar oder nicht, je nachdem, ob sie durch diese Forderungen ausgeschlossen werden oder nicht.

Ich werde in diesem einleitenden Teil meine Position an Beispielen erläutern, dazu nochmal zu Quines 'Verwendungskriterium' ("Vx x=a") und Hugues Leblancs 'nicht logisch wahre Behauptung' Fa→Vx Fx zurück. Beide haben sie eine ganze Reihe grundlegender und formal relevanter Eigenschaften:

1. "Vx x=a", bzw Fa→Vx Fx sind zunächst einmal selbst Aneinanderreihungen vom Zeichen.
2. sind sie metasprachliche Namen von objektsprachlichen Zeichen (-Aneinanderreihungen), zumindest ""Vx x=a"".

Außerdem gilt in prädikatenlogischer Festsetzungen mit entprechendem Zeichen-Inventar:

3. "Vx x=a", Fa→VxFx sind ableitbar, Aussage, Formel, dh sie haben gewisse syntaktische Eigenschaften.
4. sind sie allgemeingültig, dh sie haben auch noch gewisse semantische Eigenschaften.

Für welche dieser Eigenschaften sollen nun eigentlich die leeren oder auch mehrdeutigen Namen problematisch sein? Zunächst stelle ich in Abschnitt A. die Frage für die Zeichennamen: 1. Ergeben sich (bei mehrdeutigen oder leeren Namen) für Fa→VxFx oder "Vx x=a" als Folgen von metasprachlichen Zeichen oder als Namen objektsprachlicher Zeichen(folgen) unerwünschte Konsequenzen aus den Festlegungen? Dann geht es 2. um das semantische Poblem: leere und mehrdeutige Namen als Namen objektsprachlicher Zeichen und die Allgemeingültigkeit von Fa→VxFx. Dann stelle ich in Abschnitt B. die Frage für extensional beliebige Objektnamen in Interpretationen.

A. Grundsymbole oder Zeichennamen und ihre Verwendbarkeit

Eine formal notwendige Charakterisierung der Grundsymbole. Man stelle sich einmal einen Kalkül vor, für den folgende Festsetzungen getroffen werden:
Individuenkonstanten: "LEITER", "NICHTLEITER",...
Prädikatkonstanten: "VERKAUFEN",...
logische Zeichen: "NICHT",...
Atomaussagen: "NICHTLEITERVERKAUFEN", "LEITERVERKAUFEN",..
("..." dient hier der verkürzenden Darstellung)
Betrachten wir nun so einen (hier verkürzt eingeführten) Kalkül zusammen mit semantischen Festlegungen, und zwar unter einer Bewertungssemantik:
Bewertungen ordnen allen Atomaussagen Wahrheitswerte zu. Sei b eine solche Bewertung, wir können für sie festlegen, daß sie "LEITERVERKAUFEN" mit wahr und "NICHTLEITERVERKAUFEN" mit wahr bewertet. Nun sieht man sofort, daß sich daraus ein Problem ergeben kann bezüglich der Eindeutigkeit definierter Eigenschaften (der Zusammenhang mit dem Problem der Namen wird unten klar werden). Nämlich: Wenn "NICHT" Negationszeichen des Kalküls ist, was für die Semantik nichts anderes heißt, als daß eine Aussage vor der "NICHT" steht genau dann falsch ist, wenn diese Aussage selbst wahr ist. Dann gilt plötzlich, daß "NICHTLEITERVERKAUFEN" wahr und falsch ist, wahr ist es als Atomaussage, gemäß Festlegung der Bewertung b; es ist falsch gemäß semantischer Festlegungen für die Negation (als Negation einer (anderen) wahren Aussage). Damit sind 2 Dinge klar, zum einen, daß das Problém durch die spezielle Grundsymbolmenge verursacht wird, und zum andern, daß solche Konsequenzen ausgeschlossen werden müssen.
Die Schwierigkeit ist, daß Aussage, Formel, Theorem, Wahrheitswert, für Aneinanderreihungen oder Folgen von Grundsymbolen festgelegt sind. Die grundlegenden Definitionen hierzu sind in Kapitel 00. Dabei kann, wie das Beispiel zeigt, dieselbe Aneinanderreihung aus verschiedenen Grundsymbolen entstehen und als Konsequenz zB widersprüchliche syntaktische Eigenschaften erhalten, Atomaussage und (Negation einer Atomaussage, also damit) nichtatomare Aussage sein (vgl. Kap.1).
Die übliche Forderungen, wie z.B. die Folgenden, sind hierfür nicht ausreichend oder klar genug: Verschiedenheit der Grundsymbole oder verschiedene Grundsymbole sollen Namen verschiedener objektspachlicher Zeichen sein, (vgl. das Beispiel). Es scheint unmittelbar einsichtig und ist auch formal bewiesen, daß die Forderung der eindeutigen Zerlegbarkeit für beliebige Aneinandereihungen von Grundsymbolen in ebensolche ausreichend ist. Darüberhinaus läßt sich diese Forderung aber durch eine einfache einschränkende Charakterisierung der Grundsymbole erfüllen: Wenn keines der Grundsymbole durch Davor-(bzw Dahinter)- schreiben von Symbolen in ein anderes Grundsymbol übergeht, bei mit Ziffern indexierten Buchstaben "x_1",

"P_5", ist das zB erfüllt, nicht aber bei den Grundsymbolen "NICHT", "LEITER", "NICHTLEITER". Solche Grundsymbolmengen sind aber (wie zu erwarten), nur in dem Sinne adäquat, als sie nur die formale Korrektheit der syntaktischen Festlegungen garantieren, aber nur solche Grundsymbolmengen sind überhaupt zulässig. **Verwendbarkeit extensional beliebiger Grundsymbole.**

Syntaktische Festlegungen werden in der Metasprache formuliert und sollen etwas für Zeichen festlegen, für die Zeichen der Objektsprache. Dazu müssen in den Festlegungen selbst Namen dieser Zeichen vorkommen, metasprachliche Namen objektsprachlicher Zeichen, zB Anführungsnamen.

Es wird jetzt (und in Kap.1) um die extensionale Verwendung dieser Zeichennamen gehen. An dieser Stelle weise ich zum erstenmal auf das wichtige und grundsätzliche Problem der Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung von Namen (im formalen Kontext) hin. Allein die Tatsache, daß in syntaktischen Festlegungen Namen von Zeichen vorkommen, daß wir Anführungszeichen schreiben, garantiert natürlich keinesfalls, daß diese extensional verwendet werden. Diesen Punkt halte ich für sehr wesentlich. Die Behauptung der Nichtverwendbarkeit leerer oder der alleinigen Verwendbarkeit von eindeutigen Namen, also rein extensional charakterisierter Namen, setzt natürlich voraus, daß Namen überhaupt extensional verwendet werden. Nur bei extensionaler Verwendung kann die Extension überhaupt Probleme verursachen. Und genauso wie " "München" liegt am Eisbach" nicht eine Aussage über ein Wort wird, läßt sich das obige Problem nicht durch Anführungsnamen lösen. Der Ausgangspunkt der Untersuchung muß bei der Formulierung eines Verwendungskriteriums liegen. Meine erste Frage ist, ob leere oder mehrdeutige Namen als Grundsymbole der syntaktischen und semantischen Festlegungen, das heißt, als metasprachliche Namen objektsprachlicher Zeichen zulässig sind. Ich untersuche also jetzt die metasprachlichen Festsetzungen der Prädikatenlogik bzgl der Verwendung einer Gruppe dort vorkommender Namen, die ich Grundsymbole nenne. Diese Grundsymbole sind Namen von objektspachlichen Zeichen und kommen in Aussagen wie: " Fa ist Formel " vor. Sie werden, nach dem Fregeschen Verwendungskriterium verwendet, wenn ihre extensionsgleiche Ersetzung den Wahrheitswert solcher Aussagen nicht verändert.

Betrachten wir ein anderes Beispiel. "Fa→Ga ist Theorem" gilt üblicherweise nicht als prädikatenlogisch wahr, aber "Fa→Fa ist Theorem". Woher wissen wir nun aber, daß nicht beide Namen ein und derselben objektsprachlichen Zeichenfolge sind? Beide könnten Namen derselben objektsprachlichen Formel sein, diese wäre dann einmal Theorem und einmal nicht, je nachdem wie (mit welchem Namen) wir über sie reden. Das Fregesche Verwendungskriterium fordert hier für die Verwendung der Grundsymbole in den Festsetzungen, daß extensionsgleiche Ersetzungen von Grundsymbolen in Aussagen wie -um Beispiele

für die Kernfestsetzungenzdereformalen Logik ""Vx x=a" ist Aussage", ""Vx x=a" ist Formel", "Fa→VxFx ist Theorem", "Fa→VxFx ist wahr unter der Interpretation (U,i)" den (metametasprachlichen) Wahrheitswert dieser Aussagen unverändert lassen. Und das muß aufgrund der Festsetzungen selbst so sein, genauso wie bei "Boston ist Großstadt", durch die Aussage selbst die extensionale Verwendung von "Boston" festgelegt wird. Nur wenn die Grundsymbole diese Forderung aufgrund der Festsetzungen erfüllen, werden sie extensional verwendet.

Zunächst gehe ich davon aus, daß die Grundsymbole Namen von Zeichen sind, metasprachliche Namen von objektsprachlichen Zeichen. Dann ist die Frage zu untersuchen, welche Eigenschaft die Menge aller Zeichennamen haben muß, damit übliche prädikatenlogische Festsetzungen (bzgl der darin vorkommenden Zeichennamen) dieses Fregesche Verwendungskriteium erfüllen.

Wie lautet das Verwendungskriterium für diesen Spezialfall, wenn ich extensionsgleiche Symbolfolgen nenne, was durch Ersetzen von Zeichennamen durch extensionsgleiche entsteht? Die Frage ist: welche Eigenschaft die Menge der (Zeichennamen-)Symbole haben muß, damit extensionsgleiche SymboLfolgen in Ihren syntaktischen und semantischen Eigenschaften wie Formel, Theorem, wahr unter Interpretationen, übereinstimmen? Damit also z.B. solche Konflikte wie Fa Ga ist eventuel Theorem, ausgeschlossen werden. Dazu müssen verschiedene, extensionsgleiche Grundsymbole ausgeschlossen werden. Damit sind wir aber an die Grenzen des Verfahrens gestoßen. Es sollte die Frage nach der Art der in der klassischen Logik (als Namen objektsprachlicher Zeichen) verwendbaren Namen beantworten (durch die Charakterisierung der Zeichennamenmenge, bei der die dort festgelegten Eigenschaften wahrheitswertinvariant bzgl extensionsgleicher Ersetzungen von Zeichennamen wären). Das Ergebnis ist, daß wir extensionsgleiche, verschiedene Namen ausschließen müssen. Ist es aber dann noch vernünftig von der Verwendung von Namen zu sprechen? "George Sand" wird in "George Sand ist Pseudonym" nicht extensional verwendet, weil "Aurore Dupin" und "George Sand" extensionsgleiche Namen sind ("George Sand" ist das Pseudonym von Aurore Dupin, vereh. Baronin Dudevant), aber die Aussage "Aurore Dupin ist Pseudonym" im Gegensatz zur ersten Aussage falsch ist. Wie aber sollten wir dies prüfen, ohne extensionsgleiche, verschiedene Namen? Ein Mangel der Logik oder des Verfahrens ist also, daß ein notwendiges Kriterium für die Verwendung der Zeichennamen die Ununterscheidbarkeit von Verwendung und Erwähnung bedingt. Ich glaube deshalb, daß wir die Frage danach, was die Festlegungen eigentlich festlegen, neu stellen müssen. Das Hantieren mit Anführungszeichen täuscht nur eine Klarheit vor. Das Problem sind nicht die leeren oder mehrdeutigen Namen, sondern verschiedene, extensionsgleiche Zeichennamen, wenn sie in Festsetzungen vor-

kommen (und es sie gibt).
Die bisherige Analyse beschäftigt sich also mit "Vx x=a" und Fa→VxFx als Ausdrücken der Metasprache, als Folgen von metasprachlichen Grundsymbolen. Die Grundsymbole sollen einmal als Namen der (Atom-)Zeichen der prädikatenlogischer Objektsprache (des Kalküls) fungieren, und zum anderen sollen Aneinanderreihungen ebensolcher (metatsprachlicher) Grundsymbole als Namen (von Aneinanderreihungen) von objektsprachlichen Zeichen fungieren. Daraus ergaben sich zwei Forderungen:
1.muß die Zerlegung der metasprachlichen Aneinanderreihungen von Grundsymbolen in Grundsymbole eindeutig sein. Wozu es genügt, Grundsymbolmengen zu wählen, bei denen kein Grundsymbol durch Anhängen von Symbolen (nicht nur Grundsymbolen) in ein anderes Grundsymbol übergeht.
2.darf es keine verschiedenen extensionsgleichen Zeichennamen geben.
Im nächsten Schritt geht es nicht mehr um Zeichennamen in den Festlegungen allgemein,es geht um Namen, die in semantischen Festlegungen vorkommen, um die Namen, die in Interpretationen als Namen zugeordneter Objekte fungieren sollen.

B. Objektnamen oder Namen in Interpretationen und ihre Verwendbarkeit
Bewertungs- und Interpretationssemantik. In der Semantik geht es um logische Wahrheit. In der formalen Semantik von syntaktisch-semantisch Logiksystemen zunächst darum, objeobjektsprachlichen Formeln Wahrheitswerte zuzuordnen. Im klassisch-2-wertigen Systemen erfolgt diese Zuornung zumeist bewertungs- oder interpretationssemantisch. Die Verfahren sind kurz folgende:
a) Bewertungssemantik: Den Atomformeln (einfache Formeln, wie Fa, nicht aber VxFx, weil diese aus einer Formel und etwas anderem zusammengesetzt ist) werden Wahrheitswerte zugeordnet, durch eine Abbildung b (z.B. durch "b(Fa)=w", "b(Fx)=f", etc,). Dann werden beliebig langen Formeln (in Abhängigkeit von dieser sog. atomaren Bewertung) Wahrheitswerte zugeordnet (zB "b(VxFx)=w genau dann, wenn es eine Individuenkostante a gibt, mit b(Fa)=w").
b) Interpretationssemantik. Der Wahrheitswertzuordnung wird hier eine Menge ("das Universum", "der Bereich"), und eine Abbildung ("Interpretationsabbildung", "Interpretationszuordnung") zugrundegelegt. Letztere ordnet formal den Individuenkonstanten und Individuenvariablen des Kalküls Elemente des Bereichs zu, den Prädikatkonstanten Teilmengen des Bereichs. Intuitiv steht dahinter die Vorstellung, daß den Zeichen der Objektsprache Objekte (Elemente des Bereichs) bzw Mengen solcher (Teilmengen des Bereichs, die für Extensionen von Prädikaten stehen) zugeordnet werden. Unter den Mengen von Objekten, die den Prädikatkonstanten zugeordnet werden, stellt man sich die Menge von Objekten vor, die unter eine Eigenschaft fallen, diese Eigenschaft gemeinsam

haben.

Diese Vorstellungen werde ich aber im folgenden wieder (vor allem aber in Kap.2) von den konkreten in mengentheoretischer Sprache formulierten Festsetzungen, wie "i(a)= Pegasus" und "i(F)={Pegasus,Aurore Dupin}" trennen, um sie nur wird und darf es gehen.

Ein Beispiel: Betrachten wir folgende zwei Interpretationen

Universum U={George Sand}, U'={George Sand, Aurore Dupin}

(die Namen sind extensionsgleich)

Interpretations-Abbildung

i(a)= George Sand =i'(a)

i(F)= {George Sand} , i'(F)= {Aurore Dupin}

(a sei dabei Individuenkonstante, F Prädikatkonstante des Kalküls).

Gemäß den üblichen Festsetzungen gilt nun:

F(a) ist wahr unter (U,i) genau dann, wenn George Sand∈{George Sand}

F(a) ist falsch unter (U,i) genau dann, wenn George Sand∉ {Aurore Dupin}

Aber nicht die formalen Festsetzungen, nicht die Mengenlehre entscheidet nun über die Wahrheit von "George Sand∈{Aurore Dupin}", sondern unser empirisches Wissen: "George Sand" ist ein Pseudonym von Aurore Dupin. Nicht, wenn wir uns für George Sand George Sand entscheiden, entscheiden wir uns für die Verwendung von Namen, höchstens wenn wir uns für George Sand∈{Aurore Dupin} entscheiden, dafür, daß "George Sand∈{Aurore Dupin} " wahr ist. Aber wann und wie können wir uns dafür entscheiden?

Halten wir nochmal fest:

Die klassische Interpretationssemantik legt Wahrheitswerte für die Formeln eines Kalküls in Abhängigkeit von Interpretationen fest durch mengentheoretische Ausdrücke, wie "Pegasus∈{Pegasus}". In Interpretationen können, wie wir gesehen haben, singuläre Namen vorkommen. Um die Verwendung dieser Namen wird es jetzt gehen, darum ob leere, mehrdeutige oder nur eindeutige Namen hier verwendbar sind. Hier sind wir an der einzigen Stelle in der formalen Logik an der Pegasus (bzw "Pegasus") auftauchen kann! Es wird zunächst um die Formulierung eines extensionalen Verwendungskriterium für Namen in Interpretationen gehen und dann wie oben darum, welche Eigenschaft die Menge aller singulärer Namen haben muß, damit dieses Kriterium von den klassisch-üblichen Festsetzungen, jetzt der Interpretationssemantik, erfüllt ist.

Extensional beliebige Objektnamen und interpretationssemantische Wahrheit

Vergleichen wir die Interpretationen (U,i) und (U',i') von oben. Weil die Denotate von "George Sand" und von "Aurore Dupin" gleich sind, die Namen extensionsgleich sind, unterscheiden sich diese Interpretationen weder in den a noch in den F zugeordneten Objekten bzw Objektmengen, noch in den Objekten, die zu ihren Bereichen gehören. Es sind zwei Interpretationen, die sich also

weder im Bereich, noch in den Objekten bzw Objektmengen unterscheiden, die sie jeweils jedem Zeichen der Objektsprache zuordnen. Wie wir noch sehen werden, können sie das jedoch bei mehrdeutigen oder leeren Namen auf verschiedenste Weisen. Das Verwndungskriterium wird sein: Die durch semantische Festlegungen solchen Interpretationen zugeordneten Wahrheitswertverteilungen dürfen sich untereinander nicht unterscheiden (vgl. Kap.2.1).

Bei mehrdeutigen und leeren Namen tauchen jetzt noch andere Möglichkeiten auf, neben George Sand$\in$ {Aurore Dupin}:

Pegasus$\in${Pegasus, George Sand}

Pegasus$\in${George Sand}

Pegasus$\in${das geflügelte Pferd des Belerophon}

Und bei dem gemeinsamen Pseudonym einer Gruppe französicher Mathematiker, "N.Bourbaki", mit dem Mitglied des Namens "J.S.":

N.Bourbaki$\in${J.S.}

J.S.$\in$ {N.Bourbaki} oder anders formuliert, für i(a)= Pegasus, N.Bourbaki, J.S. und i(F)= {Pegasus}, {J.S.} , {das gefluegelte Pferd des Belerophon}, ist Fa wahr unter (U,i) oder nicht?

Es ist klar, daß

1.die Wahrheit festgelegt sein muß, in Abhängigkeit von Beziehungen zwischen Extensionen der vorkommenden Namen, damit wir von extensionaler Verwendung sprechen können. Aber bei den Beispielen wird auch klar,daß

2.unsere Intuition keineswegs eindeutig entscheidet, und

3.wird klar, daß wir einen geeigneten sprachlichen Rahmen brauchen, (die übliche Formulierung "J.S$\in${J.S}" reicht nicht aus) um Unterschiede und Festsetzungen hier explizit machen zukönnen.

Intuitive Semantikvarianten. Auf der Grundlage verschiedener Festlegungen für extensional beliebige Namen werden jetzt die Untersuchungen über die verwendbaren Namen fortgesetzt. Es sollen die intuitiv vertretbaren Vorstellungen ausformuliert werden, nach denen wir uns in den obigen Fällen entscheiden könnten.

Für die Untersuchung der Frage der Verwendbarkeit extensional beliebiger Namen in Interpretationen müssen also zunächst einmal die Wahrheitsbedingungen so formuliert werden, daß in obigen Fällen für oder gegen Wahrheit entschieden werden kann. Wir müssen uns zunächst einmal in der Metasprache für Wahrheit und Falschheit beim Vorkommen extensional beliebiger Namen entscheiden. Ich sehe folgende Möglichkeiten (im 2-wertigen Rahmen):

1."N.Bourbaki ist Schriftsteller " ist wahr, wenn alle Bourbakis Schriftsteller sind.

2.wenn einer Schriftsteller ist (vielleicht der, den ich gerade im Kopf habe).

3.wenn "N.Bourbaki" wahre Einsetzungsinstanz für "x" in "x ist Schriftsteller" ist. Hier ist aber einmal möglich, daß dafür allein die Extension des Namens oder aber der Name selbst (wie bei "x ist Pseudonym") entscheidend ist (vgl. Kap.2.1.2).

Wie man leicht verifiziert, kann man bei der üblichen Identifikation von Prädikaten mit Mengen, d.h. Mengen, die durch singuläre Namen spezifiziert werden, wie {N.Bourbaki,Pegasus,J.S}, diesen beiden Möglichkeiten folgendermaßen Rechnung tragen:

3a.der Namen muß selbst in der Mengenspezifizierung vorkommen,

3b.zu einem solchen nur extensionsgleich sein.

Wir haben also folgende Möglichkeiten uns für die Wahrheit von Fa unter einer Interpretation, die a Pegasus zuordnet und F etwa die Menge, die Pegasus N.Bourbaki,Aurore Dupin zuordnet, zu entscheiden, nämlich danach

I.ob alle, falls vorhandenen Denotate von "Pegasus" Denotate von (ev. mehreren) in " Pegasus,N.Bourbaki,Aurore Dupin " vorkommender Namen sind.

II.ein Denotat, Denotat eines dort vorkommenden Namens ist,

III.extensionsgleich zu einem dort vorkommenden Namen ist, oder

IV.selbst dort vorkommt.

Die übliche mengentheoretische Formulierung kann man in einer dieser Weisen verstehen, aber auch als unklar oder offen im leeren oder mehrdeutigen Fall betrachten. Mir scheint, als läge hier eine der Ursachen für die Unfruchtbarkeit vieler Argumentationen, nämlich daß sie diesem Undifferenziertheit nicht Rechnung tragen.

Wenn ich jetzt die Wahrheit atomarer Formeln entsprechend festlege und für die nichtatomaren Formeln übliche Formulierungen beibehalte, ergeben sich verschiedene, neue Interpretationssemantiken.

Ich erhalte so verschiedene Interpretationssemantiken, die

1.die in der üblichen mengentheoretischen Formulierung ("Pegasus$\in$ {Xantippe, Athene}") ungeklärten Fälle entscheiden (wahr bei 1 und 3a, falsch bei 2 und 3b), und die

2.intuitiv vertretbare (und für mich alle intuitiv möglichen) Entscheidungen darstellen.

Verwendbare Namen. Jetzt stellt sich die Frage, welche Namen bzgl dieser 'intuiitiven Verschärfungen' der üblichen prädikatenlogischen Festlegungen verwendbar sind. Das Verwendungskriterium war: Interpretationen, die sich nur in vorkommenden Namen, aber nicht in den zugeordneten Objekten bzw Objektmengen unterscheiden, sollen (bzgl der jeweils betrachteten Semantik) dieselbe Wahrheitswertverteilung induzieren. Wieder entscheide ich über die (jetzt in Interpretationen als Bildernamen, oben als Zeichennamen, in Festsetzungen vorkommenden) verwendbaren Namen, über eine allgemeine Charak-

terisierung der Menge von Namen ('der möglichen Namen'), für die das Verwendungskriterium dann in den einzelnen Semantiken allgemein erfüllt ist (welche dieser Namen auch in den einzelnen Interpretationen dann vorkommen mögen).

Die Ergebnisse: Außer für den Fall 3. ergibt sich keine Notwendigkeit für eine Einschränkung bezüglich zulässiger Extensionen von Namen. Das heißt in allen diesen Fällen werden Wahrheitswertverteilungen so festgelegt, daß sich Unterschiede nur in den in Interpretationen vorkommenden Namen - aber nicht in zugeordneten Objekten oder Objektmengen - nicht auf die einzelnen Wahrheitswerte der formalen Aussagen auswirken.

Für eine Semantik mit dieser Wahrheitsbedingung 3. und damit wirft sie ein besonderes Licht auf die üblichen Festlegungen, ist das Verwendungskriterium nur beim Ausschluß verschiedener, extensionsgleicher Namen erfüllt. Auch hier sind nicht die leeren oder mehrdeutigen Namen das Problem. Aber wie schon oben bemerkt, die Notwendigkeit dieses Ausschlusses von verschiedenen, extensionsgleichen Namen macht die Unterscheidung von Verwendung und Erwähnung (der vorkommenden Namen) unmöglich. Alle Varianten erfüllen das Verwendungskriterium (nur für eine ist eine Einschränkung nötig, die aber nicht auf leere oder mehrdeutige Namen zielt) und wie ich jetzt zeigen werde, sind diese Semantiken auch mit der klassischen Syntax vertäglich.

Namenverwendung und Zuverlässigkeit und Vollständigkeit.

Ein Kalkül ist bzgl einer bestimmten Semantik zuverlässig genau dann, wenn die ableitbaren Formeln logisch wahr sind. Wenn also die formalen Ableitungsregeln zuverlässig sind, bzgl der Erhaltung der semantisch definierten Wahrheit. Ein Kalkül ist bzgl einer bestimmten Semantik vollständig genau dann, wenn die logisch wahren (zB in allen Interpretationen wahren) Formeln ableitbar sind, wenn die formalen Ableitungsregeln vollständig (dh alle) die allgemeingültigen Formeln charakterisieren.

Es wäre nun durchaus möglich, daß einige der Semantiken zwar das Verwendungskriterium für beliebige Namen erfüllen, aber bisher ist offen, ob für die Zuverlässigkeit oder Vollständigkeit leere oder mehrdeutige Namen (in Interpretationen) ausgeschlossen werden müssen Kap.2.3). Also nachdem weder leere noch mehrdeutige Zeichennamen, noch die Namen in Interpretationen für die Verwendungskriterien ein Problem sind, bleibt die Frage: Welche Eigenschaften muß die Menge der Namen erfüllen, damit der übliche prädikatenlogische Kalkül bzgl der einzelnen Interpretationssemantikvarianten zuverlässig bzw vollständig ist?

Das Ergebnis: wieder sind nicht leere oder mehrdeutige Namen problematisch. Für die Zuverlässigkeiten braucht man nichts zu fordern! Für die Vollständigkeit, dh also dafür, daß nicht mehr formale Aussagen logisch wahr als

ableitbar sind, ist es notwendig, daß es genügend Namen (mit einer jeweils spezifischen Beziehung zwischen ihren Extensionen) gibt. Das bedeutet aber, wenn der übliche Ableitungsbegriff inadäquat bzgl der Verwendung extensional beliebiger Namen und den Interpretations- Varianten ist, dann ist er zu weit, und eine Einschränkung irgendeiner Ableitungsregel kann diesen Zustand nur verschlimmern! Also zu einer Begründung der Einschränkung der Existenzgeneralisierung gemäß der Free Logic besteht keinerlei Anlaß.
Zum Schluß möchte ich noch auf ein spezeilles Problem eingehen.

III. Namen und klassische Identitätsfestlegungen

Wenn wir leere und mehrdeutige Namen zulassen stellen sich der Intuition bzgl Identitätsaussagen ähnliche Probleme wie bzgl mengentheoretischer Aussagen, und die Problematik hängt ja auch zusammen, wenn festgesetzt ist " Pegasus Athene gdw Pegasus=Athene " (vgl. Kap.3).

Identität und Intuition. Gehen wir zu den obigen Beispielen zurück. Welche der folgenden Aussagen sind intuitiv wahr?

a."Pegasus ist identisch mit Pegasus",
b."Pegasus ist identisch mit dem geflügelten Pferd des Belerophon",
c."J.S. ist identisch mit N.Bourbaki" (bei dem 5. Beitrag etwa),
d."George Sand ist identisch mit Aurore Dupin".

Jenachdem, wie wir die Identitätsbeziehung in der Metasprache (zur prädikatenlogischer Objektsprache) auffassen (verstehen, oder auch festlegen), werden wir uns verschieden entscheiden.
Wann ist für uns Identität gegeben?
I.Bei Extensionsgleichheit (dann ist nur c. falsch).
II.Bei Existenz eines gemeinsamen Denotats (dann sind a. und b. falsch).
III.Bei Existenz genau eines gemeinsamen Denotats (wie 2.).
IV.Bei Existenz jeweils genau eines und gemeinsamen Denotats (nur d. ist wahr).
V.Bei Zeichengleichheit (nur a. ist wahr).

Genau wie bei der Interpretationssemantik betrachte ich einen üblichen prädikatenlogischer Kalkül (hier mit Identitätsfestlegungen), unter Semantiken, die die Wahrheit von Identitätsaussagen (in denen extensional beliebige Namen vorkommen) jeweils nach einer der Bedingungen I.-V. in der Metasprache entscheiden. Das heißt, es werden die Fälle entschieden, in denen z.B. die formale Aussage a=b unter einer Interpreation (U,i) bewertet werden soll, in der "Pegasus" als Name des Bildes von a und "das geflügelte Pferd des Belerophon" als Name des Bildes von b vorkommen. Auf diese Weise enstehen hier Interpretationssemantik-Varianten, die sich in den Wahrheitsbedingungen für Identitätsaussagen unterscheiden. Ich bin auch hier wieder der Ansicht, daß diese fünf Möglichkeiten eine übliche, unklare Formulierung

intuitiv vertretbar und erschöpfend präzisieren.
Die Untersuchung durchläuft nun wieder dieselben Stufen wie die Untersuchung der Verwendbarkeit extensional beliebiger Namen in Interpretationen.
Identität und verwendbare Namen. Welche Eigenschaft muß die Menge der Namen (aller singulärer Namen) haben, damit (das extensionale Verwendungskriterium:) Interpretationen, - die sich zwar eventuell in vorkommenden Namen, d.h. Benennungen von zugeordneten Objekten oder Objektmengen, unterscheiden - , allen formalen Identitätsaussagen dieselben Wahrheitswerte zuordnen?
Ergebnis: Für die Festlegugen I.-IV. ist jede beliebige Namenmenge zulässig Nur der V. Fall, und das ist wegen des Bezugs auf die vorkommenden Namen eigentlich klar, braucht eine Einschränkung: keine verschiedenen extensionsgleichen Namen, also ist diese Festlegung für das extensionale Verwendungskriterium , die Unterscheidung Verwendung-Erwähnung aus den bei der Zeichennamen-Verwendung erwähnten Gründen problematisch.
Identität, Namen und Zuverlässigkeit. Bei welcher Menge aller singulärer Namen sind die klassischen Identitätsfestlegungen (Totalreflexivität: a=a; Transitivität: wenn a=b und b=c, dann a=c ; Substituierbarkeit:wenn a=b und Fa, dann Fb) zuverlässig, das heißt, bleibt die Wahrheit von objeobjektsprachlichen Identitätsaussagen bzgl der Ableitungsregeln erhalten?
Namen, Identität und Vollständigkeit. Ich betrachte die übliche Festsetzungen eines pradikätenlogischen Kalküls bezüglich Interpretationssemantiken, die die Wahrheit von Identitätsaussagen nach einem der Fälle I.-V. festlegen, kombiniert mit meinen Semantikvarianten von oben (Variation der Wahrheitsfestlegung für Atomaussagen). Dann haben wir also für einen Kalkül mit Identität 5x5 Interpretationsemantiken zur Verfügung. Trotzalledem ist das schlichte
Ergebnis: Der klassische Kalkül mit Identität bleibt bezüglich der Erweiterungen I.-V. unter den dort geltenden Voraussetzungen bzw Einschränkungen für die Namenmenge vollständig.

Fazit

A. Mit meiner anfangs geführten Kritik an Behauptungen von Leblanc und Quine zum Thema leerer Namen in der klassischen Logik, wollte ich zeigen, daß diese Ansätze wesentlich auf unzulässigen, intuitiven Deutungen einzelner Terme oder Regeln der klassischen Prädikatenlogik beruhen. Eine Kritik an der klassischen Logik muß auf andere Art erfolgen. Es scheint aber, daß die Ansätze von Quine und Leblanc in dieser Hinsicht repräsentativ sind, soweit überhaupt Argumentationen zu diesem Zusammenhang unternommen werden.
B. Die Frage, ob leere oder mehrdeutige Namen in der klassischen Logik, zulässig sind, ist wegen ihrer grundlegenden Bedeutung für die Anwendbarkeit der logischen Analyse äußerst wichtig.

C. Der Untersuchung über die Art der in der klassischen Logik verwendbaren Namen müssen Adäquatheitskriterien zugrundeliegen, meiner Untersuchung liegen Verwendungskriterien zugrunde. Diese Verwendungskriterien sind Spezialisierungen des Fregeschen Kriteriums für extensionale Verwendung von Namen, für zwei Arten von Namen, die in Festlegungen vorkommen, einmal für die metasprachlichen Namen der objeobjektsprachlichen Zeichen und zum anderen für Namen, die in Interpretationen vorkommen, als Benennungen von Objekten, die den Zeichen der Objektsprache zugeordnet werden.

D. Leere und mehrdeutige Namen sind unter den üblichen klassischen Festlegungen verwendbar, weil eine allgemeine Charakterisierung aller Namen, für die das klassische Kriterium erfüllt ist, ebensolche nicht ausschließt.

E. Übliche mengentheoretische Festlegungen für die Wahrheit von Atomformeln und Identitätsaussagen müssen für Interpretationen, in denen extensional beliebige Namen vorkommen dürfen, präzisiert werden. Ich glaube die intuitiv vertretbaren Möglichkeiten erschöpfend formuliert zu haben.

F. Die Charakterisierung der Menge von Namen für die bzgl dieser Semantikvarianten das Fregesche Verwendungskriterium für Namen in Interpretationen (dh Ersetzungen von Namen müssen die semantisch festgelegte Wahrheit jeder formalen Aussage unter diesen Interpretationen unverändert lassen) schließt für keine meiner Semantikpräzisierungen leere oder mehrdeutige Namen aus.

G. Schließlich ergibt sich bei der Frage nach der Problematik leerer oder mehrdeutiger Namen für die Vollständigkeit oder Zuverlässigkeit ebenfalls kein Anlaß für die von der Free Logic geforderten Modifikationen klassischer Festsetzungen.

Es bleibt also die Frage, wozu wir die Free Logic brauchen? Es bleibt aber auch die Frage der Problematik des notwendigen Ausschlusses von verschiedenen, extensionsgleichen Namen, vor allem im Zusammenhang mit der Erfüllung des Verwendungskriteriums für Namen der objeobjektsprachlichen Zeichen: Wenn das Kriterium erfüllt ist, gibt es keine Möglichkeit zwischen Verwendung und Erwähnung der Namen der objeobjektsprachlichen Zeichen zu unterscheiden. Wenn sie aber nicht verwendet werden 'sprechen' die Festlegungen nicht mehr über die Zeichen der Objektsprache. Das heißt aber die Festlegungen legen nichts für die Objektsprache fest! Oder anders ausgedrückt, die in den Festlegungen gesetzten Anführungszeichen um die Zeichen der Objektsprache sind nicht nach dem Verwendungskriterium gesetzt, es könnten danach genauso doppelte Anführungszeichen stehen.

0. Klassische Prädikatenlogik 1. Stufe

Ich widerlege hier die These von der Nichtverwendbarkeit leerer oder mehrdeutiger Namen in der klassischen Prädikatenlogik.
Damit ist die These von den Existenzvoraussetzungen der klassischen Prädikatenlogik, im Sinne der Voraussetzung von nichtleeren Namen, und die ree Logic-Systeme (als Existenzvoraussetzungsbefreite Logik) haben damit ihre Daseinsberechtigung verloren.

Wenn die Existenzgeneralisierung für leere Namen unzulässig ist 1), und es leere Namen gibt, dann ist zumindest auch der klassische, semantische Allgemeingültigkeitsbegriff auch intuitiv inadäquat einer bestimmbaren Stelle.
Es ist also notwendig und sinnvoll die klassischen , logischen Begriffe insgesamt in Frage zu stellen!
Genau das möchte ich tun und lege den folgenden Syntax-Semantik-Aufbau 2) der klassischen Logik zugrunde. Getreu dem Grundsatz: in der klassischen, formalen Logik gibt es keine stillschweigenden Voraussetzungen.

Syntaktische Festlegungen.

Ich lege den formalen Ableitungsbegriff für eine Sprache 1. Stufe mit nur einstelligen Prädikatkonstanten und Individuenkonstanten fest.
Die Strukturierung der Festlegung für Formeln, Aussagen, Ableitungen in Festlegungen für Alphabet einer Sprache 1. Stufe, Sprache 1. Stufe, Kalkül einer Sprache 1. Stufe wird zur Unterscheidung verschiedener Effekte von mehrdeutigen oder leeren etc. Namen dienen (in Adäquatheitsbedingungen für syntaktische Festlegungen mithilfe von mehrdeutigen Namen).
Die Bedingungen 1, 2, 3 für Alphabete sollen zunächst solche Bedingungen wie "die Grundzeichen sollen alle verschieden" sein, oder "Platzhalter für untereinander verschiedene Zeichen" sein, oder für Reden mithilfe von Anführungsnamen sein, deren Problematik darin liegt, daß entweder nicht klar ist, was sie heißen sollen oder wofür sie notwendig sind oder beides.[1)]

1) Im Abschnitt: Namenwörter in Kap. 00 Satz 4 gebe ich eine notwendige Ergänzung der Forderungen an.

Syntax

$\mathcal{A}$ ALPHABET einer Sprache 1. Stufe: gdw

$\exists\, \mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, \neg, \vee, \rightarrow, \forall, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}$ mit $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}))$[1] so daß

1. $\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, \{\neg\}, \{\vee\}, \{\rightarrow\}, \{\forall\}, \{\mathfrak{f}\}, \{\mathfrak{t}\}$ paarweise disjunkte Mengen sind.
2. $\mathbb{P} \neq \emptyset$
3. $\mathbb{V}$ abzählbar unendlich

$\cup\mathcal{A}$ GRUNDSYMBOLMENGE einer Sprache 1. Stufe: gdw

$\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}))$ Alphabet einer Sprache 1. Stufe mit

$\cup\mathcal{A} = \mathfrak{A} \cup \mathbb{V} \cup \{\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}\}$

Formeln und Aussagen werden für Sprachen 1. Stufe mithilfe von Aneinanderreihungen oder Konkatenationen von Grundsymbolen festgelegt.

$\frown$ KONKATENATION über A : gdw

$\exists\, Z$ mit 1. $\frown \subseteq Z \times Z \times Z$ assoziativ und rechtseindeutig

2. $A \subseteq Z$

3. $\forall\, z \in Z\ \exists\, a_i \in A, n \in \mathbb{N}$ mit $z = \frown(a_1, (\ldots\ldots \frown(a_{n-1}, a_n)\ldots))$

Beispiele: 1) $\frown$ Verknüpfung über $\{\text{„0“}, \text{„1“}, \ldots \text{„9“}\}$

mit $Z = \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen, die auch mit „0“ anfangen dürfen)

$\frown(\text{„a“}, \text{„b“}) := \text{„ab“}$ für $\text{„a“}, \text{„b“} \in \{\text{„0“}, \ldots \text{„9“}\}$

Ziffern für natürliche Zahlen

2) $\frown$ Verknüpfung über $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, mit $A = \{a, b, \ldots z\}$

$\frown((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots b_m)) := (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_m)$ für $a_i, b_j \in A$

mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ (die freie Halbgruppe über $\{a, \ldots z\}$)

3). Verknüpfung über $\mathbb{N}$

mit . $(a,b) = ab$ (Multiplikation) für $a,b \in \mathbb{N}$

Für $\frown$ Konkatenation über A und $a_1, \ldots, a_n \in A$

$a_1 \ldots a_n := \frown(a_1, \ldots, \frown(a_{n-1}, a_n))$ (wohldefiniert, wegen der Assoziativität von $\frown$)

1) „$\exists$“, „$\forall$“ ist Abkürzung für „es gibt“ bzw. „für alle“, „$>$“ für „dann“, „$<$“ für „wenn“, „$\Leftrightarrow$“ für „genau dann, wenn“.

$\mathcal{S}$ SPRACHE 1. Stufe: gdw

$\exists\, \mathcal{A}, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u, \frown$ mit $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$, so daß

1. $\mathcal{A} = (\mathbb{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \{, \}))$ Alphabet einer Sprache 1. Stufe

2. $\frown$ Konkatenation über $\bigcup \mathcal{A}$, mit

3. $\mathbb{F}o = \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$: $M \in \mathbb{M}$ gdw a. $\forall P \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{I} \cup \mathbb{V}$ gilt $\{Pa\} \in M$

b. $\forall \Omega_1, \Omega_2 \in M$ gilt $\{\Omega_1 \vee \Omega_2\}, \{\neg \Omega_1\}$, $\{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2\} \in M$

c. $\forall \Omega \in M, \forall x \in \mathbb{V}$ gilt $\{\forall x \Omega\} \in M$

4. $\mathbb{A}u = \{\Omega : \Omega \in \mathbb{F}o$ und $fr(\Omega) = \phi\}$

für $fr : \mathbb{I} \cup \mathbb{V} \cup \mathbb{F}o \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{V})$ Abbildung mit

$\forall a \in \mathbb{I}$ $fr(a) = \emptyset$

$\forall a \in \mathbb{V}$ $fr(a) = \{a\}$

$\forall a \in \mathbb{I} \cup \mathbb{V}, P \in \mathbb{P}$ $fr(\{Pa\}) = fr(a)$

$\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{F}o$ und $\forall x \in \mathbb{V}$

$fr(\{\neg \Omega_1\}) = fr(\Omega_1)$

$fr(\{\Omega_1 \vee \Omega_2\}) = fr(\{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2\}) = fr(\Omega_1) \cup fr(\Omega_2)$

$fr(\{\forall x \Omega_1\}) = fr(\Omega_1) \setminus \{x\}$ 1)

$\mathcal{K}$ KALKOL 1. Stufe: gdw

$\exists\, \mathcal{S}, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b$ mit $\mathcal{K} = (\mathcal{S}, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$, so daß

1. $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$ Sprache 1. Stufe

2. $\mathbb{A}x = \{\Omega : \Omega \in \mathbb{F}o$ und Ω Axiom eines vollständigen Kalküls mit Abtrennung und Generalisierung$\}$

3. $\mathbb{A}b = \{(\Omega_1, \ldots \Omega_n) :$ $n \in \mathbb{N}$ und $\forall i$ $1 \leq i \leq n$ gilt: $\Omega_i \in \mathbb{A}x$ oder $\exists\, k < i$ und $x \in \mathbb{V}$ mit $\Omega_i = \{\neg \forall x \{\neg \Omega_k\}\}$ oder $\exists\, k, l < i$ und $\Omega_e = \{\Omega_k \rightarrow \Omega_i\}$

Ω ist ABLEITBAR in $\mathcal{K}$: gdw

. $\mathcal{K} = (\mathcal{S}, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ Kalkül 1. Stufe

$\exists\, \Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \mathbb{F}o$ mit $(\Omega_1, \ldots \Omega_n, \Omega) \in \mathbb{A}b$

1) Vgl : Ebbinghaus, H.-D., Einführung in die mathematische Logik Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1978, S 30

Semantische Festlegungen

Ich werde zwei der häufigsten Semantiken untersuchen:
die Bewertungs- und die Interpretationssemantik.
Unter einer Semantik verstehe ich einfach die Menge von Wahrheitswertverteilungen auf den Formeln eines Kalküls.
In der klassischen Bewertungssemantik werden sie auf der Basis von Atombewertungen, in der klassischen Interpretationssemantik auf der Basis von Interpretationen festgelegt.

Semantik

i INTERPRETATION für $\mathcal{S}$: gdw
1) $\mathcal{S} = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \dashv)), \cap, \mathfrak{Fo}, \mathfrak{Au})$ Sprache 1. Stufe
2) $\exists\, U, i$ mit $i = (U, i)$ und $U \neq \emptyset$ und $i : \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V} \cup \mathfrak{P} \rightarrow U \cup \mathfrak{P}(U)$ Abbildung
mit $\forall a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$ $i(a) \in U$
$\forall a \in \mathfrak{P}$ $i(a) \in \mathfrak{P}(U)$

b w-f-ATOMBEWERTUNG für $\mathcal{S}$: gdw
1) $\mathcal{S} = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \dashv)), \cap, \mathfrak{Fo}, \mathfrak{Au})$ Sprache 1. Stufe
2) $w \neq f$ und $b : \{\Omega : \Omega = \mathfrak{f} P a t$ für $P \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}\} \rightarrow \{w, f\}$ Abb.

$\mathfrak{S}$ SEMANTIK für $\mathcal{S}$: gdw
1) $\mathcal{S} = (\mathfrak{A}, \circ, \mathfrak{Fo}, \mathfrak{Au})$ Sprache 1. Stufe
2) $\exists\, w \neq f$ mit $\mathfrak{S} \subseteq \{s : s : \mathfrak{Fo} \rightarrow \{w, f\}$ Abbildung$\}$

$\mathfrak{S}_{JK}$ KLASSISCHE INTERPRETATIONSSEMANTIK für $\mathcal{S}$: gdw
1) $\mathfrak{S}_{JK}$ Semantik für $\mathcal{S} = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \dashv)), \cap, \mathfrak{Au}, \mathfrak{Fo})$
mit $\mathfrak{S}_{JK} \subseteq \{s : s : \mathfrak{Fo} \rightarrow \{w, f\}$ Abbildung$\}$
2) $\exists\, S_{JK}$ mit $S_{JK} : \{i : i$ Interpretation für $\mathcal{S}\} \rightarrow \mathfrak{S}_{JK}$ surjektive Abb.
so daß $\forall a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}, P \in \mathfrak{P}$ $S_{JK}(U,i)(\mathfrak{f} P a \mathfrak{t}) = w$ gdw $i(a) \in i(P)$
$\forall \{\forall x \Omega\} \in \mathfrak{Au}$ $S_{JK}(U,i)(\{\forall x \Omega\}) = w$ gdw
für ein $n \in U$ $S_{JK}(U, i^n_x)(\Omega) = w$
mit $i = (U, i)$ Interpretation für $\mathcal{S}$
und $i^n_x(a) = \begin{cases} i(a) & \forall a \neq x \\ n & \text{für } a = x \end{cases}$

etc. wie üblich

$\$_B$ KLASSISCHE BEWERTUNGSSEMANTIK für σ : gdw

1) $\$_B$ Semantik für $\sigma = ((\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \exists)), \cap, \mathbb{A}u, \mathbb{F}o)$

2) $\exists\, S_B$ mit $S_B : \{b : b$ w-f-Atombewertung für $\sigma\} \rightarrow \$_B$ surjektive Abb.
so daß $S_B(b)(\{Pa\}) = b(\{Pa\})$ $\forall P \in \mathbb{P}, a \in \mathfrak{A} \cup \mathbb{V}$
$S_B(b)(\{\forall x\, \Omega\}) = w$ gdw $\exists a \in \mathfrak{A} \cup \mathbb{V}$ mit
$S_B(\Omega \frac{a}{x}) = w$ etc. wie üblich

Ω $\$$-ALLGEMEINGOLTIG in σ : gdw

1) $\$$ Semantik für $\sigma = (\mathfrak{A}, \cap, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$ mit $\$ \subseteq \{s : s : \mathbb{F}o \rightarrow \{w, f\}$ Abb $\}$

2) $\forall S \in \$$ $S(\Omega) = W$ und $\Omega \in \mathbb{F}o$

$\mathcal{H}$ $\$$-ZUVERLÄSSIG : gdw

1) $\mathcal{H} = (\sigma, Ax, Ab)$ Kalkül 1. Stufe mit $\sigma = ((\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \exists)), \cap, \mathbb{A}u, \mathbb{F}o)$

2) $\forall \Omega \in \mathbb{F}o$ Ω $\$$ - allgemeingültig $\rangle$ Ω ableitbar in $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ $\$$-VOLLSTÄNDIG : gdw

1) $\mathcal{H} = ((\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \ldots \cap, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u), Ax, Ab)$ Kalkül 1. Stufe mit $\sigma = (\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \ldots, \cap, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$

2) $\forall \Omega \in \mathbb{F}o$ Ω $\$$ - allgemeingültig $\rangle$ Ω ableitbar in $\mathcal{H}$

Anführungszeichen und Anzeichen.
Sind Anführungszeichen Anzeichen?

00. Namen

Bei der Untersuchung der Verwendbarkeit von mehrdeutigen und leeren Namen in der klassischen Logik ergibt sich folgendes (notationstechnisches) Problem.
'Mehrdeutiger Name' und'eindeutiger Name' sind Eigenschaften von Wörtern.
Um über konkrete Wörter z.B. bestimmte Namenwörter zu schreiben, schreiben wir Anführungsnamen.
Nun gilt aber für Anführungsnamen natürlich genauso wie für alle anderen Namen, das sie nicht extensional oder autonym verwendet werden können und daß das der Konte t entscheidet oder aber offen läßt, wie in "Hans ist einsilbig" (als Aussage über ein Wort oder eine Person).
Anführungszeichen können meiner Ansicht nach bestenfalls die Absicht kundtun, über Worte oder Zeichen zu sprechen.
Wenn da steht: „ i („a") : = Pegasus " , so ist daraus nicht zu schließen, daß „a" nichts zugeordnet wird; es kann beabsichtigt sein.
Das gilt generell für syntaktische- oder semantische Festlegungen der Prädikatenlogik.
Was geprüft werden muß ist:
Was geschieht, ersetzen wir etwa in einer formalen Aussage eines Kalküls oder einer Interpretation eines Kalküls einen vorkommenden Namen durch einen extensionsgleichen? Für was legen diese Festlegungen etwas fest?
Und was wollen wir das geschieht?
Wir brauchen:

1. eine Möglichkeit über solche Ersetzungen zu sprechen
2. Adäquatheitsbedingungen für solche.

Unter extensionsgleichen Namen verstehe ich Namen- Wörter, die dieselben Denotate haben, unter Wörtern Aneinanderreihungen von Buchstaben (evtl. Lauten).
Entsprechend konstruiere ich Namenwörter als (Elemente eines sogenannten: 'Ausdruchssystems':) Elemente einer Menge auf der eine assoziatíve Verknüpfung definiert ist, wobei ich zusätzlich fordere, das jedes Element dieser Menge eindeutig 'entknüpfbar' ist in Elemente einer Teilmenge,
genauso wie die Wörter unserer Schriftsprache eindeutig in Buchstaben zerlegt werden können und durch (assoziatives) Hintereinanderschreiben solcher entstehen.

Eindeutige, mehrdeutige oder leere Namen sind Elemente einer 'Namenssimulationsmenge', einer Teilmenge eines solchen Ausdruckssystems auf der eine Relation (Δ) definiert ist. Und zwar entsprechen Elemente die zu einem, mehreren oder keinem Element (des Ziels von $-\Delta$) in Δ - Relation stehen eindeutigen, mehrdeutigen oder leeren Namen.
Die syntaktischen Festlegungen eines Kalküls können wir als Definitionen von Teilmengen (Aussage, Formel) eines Ausdruckssystems über den Alphabetelementen ($\in \cup\mathfrak{A}$) der syntaktischen Festlegungen auffassen.
Ist dieses Ausdruckssystem eindeutig 'entknüpfbar', so sind syntaktischen Festlegungen wohldefiniert (abgeschl. bzgl gleichen Ausdrücken).
Für solche Systeme definiere ich extensionsgleiche Ausdrücke, als solche die sich höchstens in Teilen unterscheiden, die extensionsgleiche Namenwörter sind.

Verstehen wir unter extensionsgleichen Mengen von Namen einmal 2 Mengen deren Denotatmengen insgesamt übereinstimmen, d.h. jedes Denotat eines Namens in der einen Menge ist Denotat eines Namens in der anderen Menge (V - extensionsgleich)
oder zum anderen 2 Mengen, deren jeder Name der einen zu einem Namen der anderen; extensionsgleich ist (E - extensionsgleich).
So können wir für Abbildungen in Mengen von Namen oder Mengen von Namenmengen festlegen: die Abbildungen sind zielinvariert, wenn sie in den Bildern (desselben) Ausdrucks übereinstimmen, aber sich evtl. in (extensionsgleichen) Namen oder Namenmengen unterscheiden.

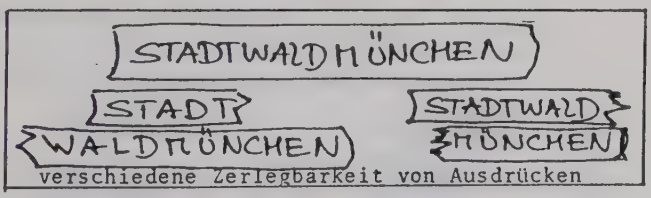
Namenwörter

Namenwörter sind Aneinanderreihungen von Buchstaben unseres Schriftsprachenalphabets. Mit ihnen reden wir über Gegenstände.
Mit Aneinderreihungen von Grundsymbolen ($\in\cup\mathfrak{A}$) reden wir über formale Aussagen und Formeln eines Kalküls.
Die Grundsymbole sind dabei im allgemeinen nicht (nicht-entknüpfbare z.B.:$\times$) Elemente unseres Schriftsprachenalphabets.
Ich werde allgemein Halbgruppen charakterisieren, deren Elemente eindeutig in Elemente einer Grundmenge 'entknüpft' werden können (wie Wörter in Buchstaben).

Darauf aufbauend kann ich dann allgemein Grundsymbolmengen (- die Teilmengen dieser Halbgruppe sind-) charakterisieren, die die Wohldefiniertheit von Formeln, Aussagen etc. garantieren (solche die eindeutig faktorisierbare Halbgruppen erzeugen). [1]

ZUM BEISPIEL ist "nichtleiterverkaufen" über der Menge {"nicht","leiter", "verkaufen"} eindeutig faktorisierbar, nicht aber wenn wir "nichtleiter" dazunehmen.
Bei (un)geeigneter Wahl der Festlegungen für Atomformeln, kann sich dann ergeben, daß "nichtleiterverkaufen" Atomformel (weil "nichleiter"⌢"verkaufen") und nicht Atomformel ist (weil "nicht"⌢" leiter"⌢"verkaufen")! [2]

Die in den syntaktischen Festlegungen eingangs (Kap.0) aufgestellten Forderungen an das Alphabet verhindern das nicht. Und ich sehe auch nicht, wie das solche Forderungen, wie daß 'die Zeichen alle verschieden sein sollen' etc. verhindern sollen.
Betrachten wir allerdings Grundsymbolmengen [3], die eindeutig faktorisierbare Ausdruckssysteme erzeugen, so wird genau das verhindert.
Genau solche werde ich charakterisieren. Dabei können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß die Grundsymbolmengenelemente selbst alle über einer Menge eindeutig faktorisierbar sind (nämlich über unserem Schriftsprachenalphabet).



verschiedene Zerlegbarkeit von Ausdrücken

Das Problem der geeigneten Grundsymbolmenge

$(\mathbb{Z}, \cap)$ AUSDRUCKSSYSTEM OBER A : gdw

1) $(\mathbb{Z}, \cap)$ Halbgruppe

2) A Erzeugendes System von $(\mathbb{Z}, \cap)$

unter einer Halbgruppe versteht man im allgemeinen eine Menge auf der eine rechtseindeutige, assoziative Verknüpfung definiert ist,

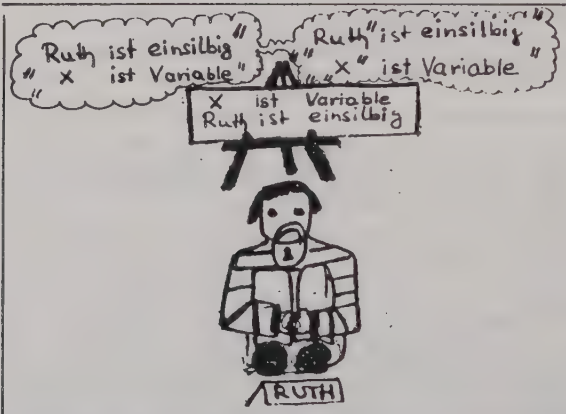
---

1) Zum Aufbau vgl.: Gerard Lallement: Semigroups and Combinatorical Applications; NY 1979

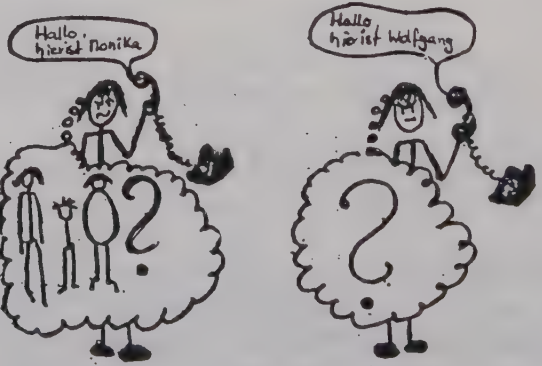
2) Leerstellen am Anfang und Ende von Wörtern sind keine Hilfe, solange es Grundsymbole wie "Herbert Mareuse" (mit Leerstellen) geben kann.

""S"⁀"~"⁀"C"⁀"~"⁀"H"⁀"~"⁀"R"?""{"		"V.WOLF"⁀","⁀"K.AMERY"⁀", ...
""S"⁀"C"⁀"H"⁀"R" ...	1/2.?	"{"V.WOLF","K.AMERY","N.BOURBAKI ...
"SCHRIFTSTELLER"	1.	"{V.WOLF,K.AMERY,N.BOURBAKI, ...
SCHRIFTSTELLER	0.	{V.WOLF,K.AMERY,N.BOURBAKI, ...

Das Problem der Hilfszeichen, am Beispiel des Konkatenationszeichens und der Mengenschreibweise und die Sprachstufen: 0, 1, 1/2,



Doppeldeutigkeiten bezüglich der Sprachebene



"Monika" ist mehrdeutiger, "Wolfgang" leerer Name.

Bemerkung: $(Z,\frown)$ Ausdruckssystem über A gdw
$\frown$ Konkatenation über A und $\frown \subseteq Z \times Z \times Z$

Bew.: $(Z,\frown)$ Halbgruppe gdw $\frown \subseteq Z \times Z \times Z$ und $\frown$ rechtseindeutig und assoziativ,
A Erzeugendensystem von $(Z,\frown)$, dann gilt $\forall z \in Z, \exists a_i \in A$ mit $z = a_1 \frown \dots \frown a_n$,
also gilt die Behauptung.

Bemerkung 1: $(Z,\frown)$ Halbgruppe, dann $(Z,\frown)$ Ausdruckssystem über Z

$(Z,\frown)$ AUSDRUCKSSYSTEM : gdw $\exists A$ mit $(Z,\frown)$ Ausdruckssystem über A
$(Z,\frown)$ AUSDRUCKSSYSTEM MIT EINDEUTIGER FAKTORISIERUNG IN A: gdw
1) $(Z,\frown)$ Ausdruckssystem über A
2) $\forall a_i, b_j \in A$ mit $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, $n,m \in \mathbb{N}$ gilt
$a_1 \frown \dots \frown a_n = b_1 \frown \dots \frown b_m \Rightarrow$ 1. $n = m$
2. $\forall i \quad a_i = b_i \quad (1 \le i \le n)$

Beispiel: die freie Halbgruppe über A in A . (vergl. Beispiel 2 Seite 8)

Bemerkung 2: $(Z,\frown)$ Ausdrucksystem mit eindeutiger Faktorisierung in Z
dann gilt : $\forall a,b,c \in Z \quad a \neq b \frown c$

Bew.: siehe Satz 1 unten.

Ich werde jetzt diese Ausdruckssysteme mit eindeutiger Faktorisierung allgemein charakterisieren.

Satz 1: $(Z,\frown)$ Ausdruckssystem mit eindeutiger Faktorisierung in A. Dann gilt $A = \{z : z \in Z \text{ und } \forall a,b \in Z \; z \neq a \frown b\}$
Die Faktorisierung kann also nur über einer Menge von unfaktorisierbaren Ausdrücken eindeutig sein.

Bew.: $a \in A \Rightarrow a \neq z_1 \frown z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in Z$
Sei $a = z_1 \frown \dots \frown z_n$ mit $z_i \in Z$ $1 \le n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \exists a_{i,j_i} \in A$ mit $z_i = a_{i,1} \frown \dots \frown a_{i,n_i}$
Also $a = a_{11} \frown \dots \frown a_{n,n_n}$ mit $a_{i,n_i} \in A \; \forall i,n_i$
$\Rightarrow$ (eind. Fakt in A) $a = a_{11} \Rightarrow n = 1$
$z \neq a \frown b \Rightarrow z \in A \quad z \neq a \frown b \; \forall a,b \in Z \quad \forall a_i \in A$ mit $z = a_1 \frown \dots \frown a_n \Rightarrow n = 1$
also $z = a_1 \in A$

Satz 2 : $(Z,\cap)$ Ausdruckssystem mit eindeutiger Faktorisierung in A gdw
$(Z,\cap)$ Halbgruppe und
1) $\forall z\in Z\ \exists n\in\mathbb{N}$ mit $z = a_1\cap\dots\cap a_n\ \forall a_i\in Z$
2) $\forall z_1,\dots z_4\in Z$ gilt $z_1\cap z_2 = z_3\cap z_4$

nur wenn $z_1 = z_3$ und $z_2 = z_4$

oder $\exists u\in Z$ mit $z_1\cap u = z_3$ und $z_2 = u\cap z_3$

oder $\exists u\in Z$ mit $z_1 = u\cap z_3$ und $u\cap z_2 = z_4$

Bew.: Sei $B^m := \{ a_1\cap\dots\cap a_n : a_i\in B \text{ für } 1\le i\le n\}$ für $n\in\mathbb{N}$, $B\subseteq Z$

$\Rightarrow$ $z\in Z \overset{A \text{ Erzeugendensyst.}}{\Rightarrow} \exists n : z\in A^n \overset{\text{eind.}}{\Rightarrow} z\notin A^{n+1} \overset{\text{Satz1}}{\Rightarrow} z\notin Z^{n+1} \Rightarrow$ 1)

$z_1\cap z_2 = a_1\cap\dots\cap a_n = z_3\cap z_4$ mit $a_i\in A \overset{\text{eid.}}{\Rightarrow} z_1 = a_1\cap\dots\cap a_{r_1}$ für $r_1, r_3\in\mathbb{N}$
$z_3 = a_1\cap\dots\cap a_{r_3}$ $1\le r_1, r_3\le n$

dann gilt für $r_1 = r_3$ $z_1 = z_3$ und $z_2 = z_4$

für $r_1 < r_3$ $z_1\cap a_{r_1+1}\cap\dots\cap a_{r_3} = z_1\cap u = z_3$ für $u = a_{r_1+1}\cap\dots\cap a_{r_3}$

für $r_1 > r_3$ entsprechend.

$\Leftarrow$ $z\in Z^n \overset{(Z,\cap)\text{Halbgr.}}{\Rightarrow} z\in Z^j\ \forall j\le n$, also $Z^{k+i}\subseteq Z^k\ \forall k,i\in\mathbb{N}$

1) $\Rightarrow \forall z\in Z\ \exists m$ mit $z\notin Z^m$

also $\exists\ 1\le n\le m$ mit $z\in Z^n\setminus Z^{n+1}$

$\Rightarrow z = z_1\cap\dots\cap z_n$ und wegen $z\notin Z^{n+i} \overset{\forall i\in n}{\Rightarrow}$ gilt $z_i\in Z\setminus Z^2$

mithin $z = z_1\cap\dots\cap z_n$ mit $z_i\in Z\setminus Z^2\ \forall i\ (1\le i\le n)$

Eindeutigkeit: $z_1\in Z\setminus Z^2 \Rightarrow z_1$ eind. Faktorisierbau (Induktionsbasis)

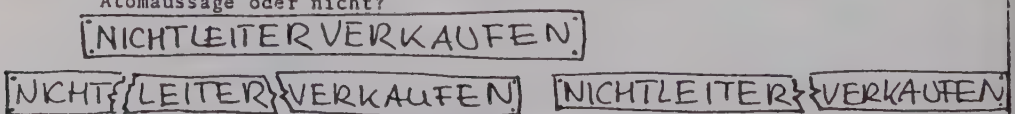
Sei nun $z_1\cap\dots\cap z_{n+1} = z_1'\cap\dots\cap z_m'$

$\overset{1)}{\Rightarrow} z_1\cap u = z_1'$ oder $z_1 = z_1'$ oder $z_1 = z_1'\cap u$

wegen $z_1, z_1'\in Z\setminus Z^2$ also $z_1 = z_1' \overset{\text{ind.}}{\Rightarrow}$ Beh

---

Atomaussage oder nicht?



Nichteindeutigkeit syntaktischer Eigenschaften, aufgrund der Nichteindeutigkeit der Zerlegung in Grundsymbole.

Sei also $(Z,\cap)$ Ausdruckssystem mit eindeutiger Faktorisierung in A

und $B \subseteq Z$

$B^{\frown} := \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ mit $M \in \mathbb{M}$ gdw 1. $B \subseteq M$

2. $\forall a,b \in M$ gilt $a^{\frown}b \in M$

Satz 3: $B^{\frown} = \{ a_1^{\frown}\dots^{\frown}a_n : a_i \in B \text{ für } 1 \le i \le n \in \mathbb{N} \}$

Bew.: Induktion $\forall a_1 \in B \Rightarrow a \in M \; \forall M \in \mathbb{M} > a_1 \in B^{\frown}$

Sei $a_1^{\frown}\dots^{\frown}a_n \in B^{\frown} \; \forall n \in \mathbb{N} > a_1^{\frown}\dots^{\frown}a_{n+1} = (a_1^{\frown}\dots^{\frown}a_n)^{\frown}a_{n+1} \in B^{\frown}$

$\{ a_1^{\frown}\dots^{\frown}a_n : a_i \in B \} \in \mathbb{M} > B^{\frown} \subseteq \{ a_1^{\frown}\dots^{\frown}a_n : a_i \in B \}$

Satz 4: $B^{\frown}$ Ausdruckssystem mit eindeutiger Faktorisierung in B

wenn $\forall z \in Z \; \forall b \in B \quad z^{\frown}b \notin B$

oder $\forall z \in Z \; \forall b \in B \quad b^{\frown}z \notin B$

Das heißt intuitiv: Kein Grundsymbol darf rechte Verlängerung in Z

eines Grundsymbols sein

oder keine linke Verlängerung in Z eines

anderen Grundsymbols.

Bew: Sei $\forall z \in Z, \forall b \in B \quad b^{\frown}z \notin B$ und $b_1^{\frown}\dots^{\frown}b_n = b_1'^{\frown}\dots^{\frown}b_m'$ mit $b_i, b_i' \in B$

Induktion über n $b_1 = b_1'^{\frown}\dots^{\frown}b_m' > b_1 = b_1'$ [oder $b_1 = b_1'^{\frown}z$]

Sei Beh. gezeigt für n

$b_1^{\frown}\dots^{\frown}b_{n+1} = b_1'\dots b_m' \underset{\text{Satz2}}{>} b_1 = b_1'\dots \; b_{n+1} = b_{n+1}'$

Rest genauso.

Bemerkung:

Damit gilt z.B., daß die üblichen Spezifizierungen von Alphabeten, mit Ind.konstanten, Ind.variablen und Prädikat-konstanten durch verschiedene Buchstaben mit Indexen eindeutige Ausdruckssysteme erzeugen. $((U\mathfrak{A})^{\frown}, \cap)$ eine eindeutige Faktorisierung über $U\mathfrak{A}$, wenn die verschieden indexierten Ausdrücke verschieden sind. Ich werde mich auf Kalkülspezifizierungen beschränken, deren Grundsymbolmengen Ausdrucks-

systeme mit eindeutiger Faktorisierung (über diesen Mengen) erzeugen. Damit ist auch (natürlich) die Wohldefiniertheit von Aussagen, Formeln, Ableitungen garantiert!

Leere und mehrdeutige Namen.

Leer und mehrdeutig sind mengentheoretische Eigenschaften.
Sind es diese Eigenschaften, die für das klassische System der Logik verhängnisvoll sind (man soll sie ja verbieten müssen), können und müssen sich alle Effekte von leeren und mehrdeutigen Namen in der klassischen Prädikatenlogik auf der Basis von mengentheoretisch charakterisierten Namen analysieren lassen, mithilfe einer sogenannten Namenssimulationsmenge. Ich gehe davon aus, die Menge aller könne mengentheoretisch simuliert werden, um dann zu untersuchen ob und welche extensionale Eigenschaften von Namen problematisch sind.
Ausgehend von den Ausdrucksmengen des letzten Abschnitts, werde ich NAMENSSIMULATIONSMENGEN definieren, als Teilmengen N einer Ausdrucksmenge, auf der eine Relation Δ definiert ist, mit einem Zielbereich, der aus Simulatoren der Namen(wörter)- Denotate besteht.
Ein Ausdruck wird einen leeren Namen simulieren, wenn er in der Ausdrucksmenge N liegt und zu nichts in Δ-Relation steht.
Ein Ausdruck in N wird einen mehrdeutigen Namen simulieren, wenn er zu verschiedenen (bzw. bezüglich einer auf dem Δ-Zielbereich definierten Äquivalenzrelation nichtäquivalenten Elementen des Zielbereiches von Δ) in Δ-Relation steht.
Die Δ-Bilder 'simulieren' die Denotate (Äquivalente Elemente der Δ- Zielmenge (O) werden nicht unterschieden)(der Zielbereich kann Z B. die Menge der Punkte des Raumes $\mathbb{R}^3$ umfassen).
(N,Δ) NAMENSSIMULATIONSMENGE: gdw

$\exists Z,\cap,A,O$ 1) $(Z,\cap)$ Ausdruckssystem mit eindeutiger Faktorisierung über A, so daß $N \subseteq Z$
2) $\Delta \subseteq N \times O$

Für (N,Δ) Namenssimulationsmenge gelte:
$\Delta : N \to \mathcal{P}(\{o : \exists n \in N \text{ mit } (n,o) \in \Delta\})$ Abbildung mit $\Delta(n) = \{o : (n,o) \in \Delta\}$
n NAME : gdw $n \in N$
n LEERER Name : gdw $n \in N$ und $\Delta(n) = \phi$
n MEHRDEUTIGER Name: gdw $\exists o_1, o_2$ mit $o_1 \neq o_2$ und $o_1, o_2 \in \Delta(n)$ und n Name
n EINDEUTIGER Name: gdw n Name und weder mehrdeutig noch leer.

Extensionsgleichheit

Unter extensionsgleichen Namen werde ich Namen verstehen, die zu genau denselben Elementen des Δ-Zieles in Δ-Relation stehen.
Unter gleichen Mengen verstehen wir Mengen, die die gleichen Elemente enthalten,
unter extensionsgleichen Mengen von Namen verstehe ich einmal Mengen deren Namen zusammen jeweils dieselben Denotate haben:
V-extensionsgleiche Namenmengen,
und zum anderen Mengen, deren jeder Name zu einem Namen der anderen Menge extensionsgleich ist (E-extensionsgleich).

(N,Δ) Namenmenge

n,n' EXTENSIONSGLEICH (E NAMEN) : gdw n,n' Namen und $\tilde{\Delta}(n)=\tilde{\Delta}(n')$

M,M' E-EXTENSIONSGLEICH (E MENGEN VON NAMEN) : gdw 1) $M,M' \subseteq N$
2) $\{\tilde{\Delta}(n) : n\in M\}=\{\tilde{\Delta}(n) : n\in M'\}$

M,M' V-EXTENSIONSGLEICH (E MENGEN VON NAMEN) : gdw 1) $M,M' \subseteq N$
2) $\bigcup_{n\in M}\tilde{\Delta}(n)=\bigcup_{n\in M'}\tilde{\Delta}(n)$

M,M' E-EXTENSIONSDISJUNKT (E MENGEN VON NAMEN) : gdw 1) $M,M' \subseteq N$
2) $\{\tilde{\Delta}(n) : n\in M\}\cap\{\tilde{\Delta}(n) : n\in M'\}=\emptyset$

BEM. M,M' E-extensionsgleich $\Rightarrow$ M,M' V-extensionsgleich

$U,U' \subseteq N$ und $U=U'$ $\Rightarrow U,U'$ E-extensionsgleich

Jetzt noch zwei für das Folgende wichtige Definitionen:
extensionsgleiche Ausdrücke und zielinvariante Abb.. Erstere ist wichtig für die syntaktischen Festlegungen mit Namen. Extensionsgleiche Ausdrücke sollen dieselben syntaktischen Eigenschaften (Formel, Aussage etc.) haben. Ich werde untersuchen für welche Namen das erfüllt ist unter den klassischen Festlegungen.
In Ausdruckssystemen mit eindeutiger Faktorisierung werde ich unter extensionsgleichen Ausdrücken solche verstehen, die sich höchstens in (extensionsgleichen) Namen (als Faktor) unterscheiden.

Sei (N,Δ) Namenmenge
$(Z,\wedge)$ Ausdruckssystem über A mit $N \subseteq Z$
$\forall z,z' \in Z$ z,z' EXTENSIONSGLEICH (E AUSDRÜCKE) über A: gdw
$\forall z_i, z'_i \in A$ mit $z = z_1 \wedge \dots \wedge z_n$, $z' = z'_1 \wedge \dots \wedge z'_m$ gilt
1) $n=m$
2) $\forall i$ $z_i = z'_i$ oder z_i, z'_i extensionsgleich (e Namen).

Also: extensionsgleiche Ausdrücke unterscheiden sich höchstens in extensionsgleichen Namen.

Nun zu den zielinvarianten Abbildungen. Ich werde sie für die Analyse der interpretationsemantischen Festlegungen heranziehen. Dort untersuche ich:

> für welche Arten von Namen gilt, daß Interpretationen, die sich nur in den Bereichsnamen, nicht aber den Bereichen unterscheiden, und deren Interpretationsabbildungen dasselbe (vermögen extensionsgleicher Namen oder Namenmengen) jedem einzelnen Ausdruck zuordnen, dieselben Wahrheitswertverteilungen induzieren?

i ,i' ZIELINVARIANTE ABBILDUNGEN: gdw

1. i ,i' Abbildungen
2. $\forall \alpha \in vb(i) \cap vb(i')$ gilt $i(\alpha) = i'(\alpha)$ oder $i(\alpha), i'(\alpha)$ extensionsgleiche Namen. 1)

für $\propto \in \{V, E\}$:

i , i' $\propto$ – ZIELINVARIANTE ABBILDUNGEN: gdw

1. i, i' Abbildungen
2. $\forall \alpha \in vb(i) \cap vb(i')$ gilt $i(\alpha) = i'(\alpha)$ oder $i(\alpha), i'(\alpha) \propto$ extensionsgleiche Namenmenge.

Also: zielinvariante Abbildungen ordnen einem Urbild (via extensionsgleicher Namen oder Namenmengen) dasselbe zu.

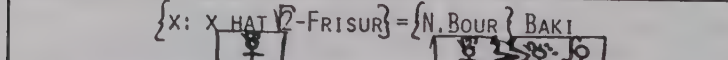
FÜR ALLE X, X=X: PEGASUS∈{PEGASUS}=∅ ODER PEGASUS=PEGASUS
∅=∅: {PEGASUS} ={RÜBEZAHL} ODER PEGASUS≠RÜBEZAHL
{N.BOURBAKI, K.AMERY} ={N.BOURBAKI, K.MAYER, PEGASUS, K.AMERY}

Leere und mehrdeutige Namen als Darstellungsproblem

Sprach- bzw. Schrift-Ebene, Denotate-Ebene und die Beziehung dazwischen, die in zwei Richtungen mehrdeutig oder leer sein kann.

{X: X IST SCHRIFTSTELLER} {D.LESSING, K.AMERY, N.BOURBAKI, ...}

Mengendarstellung mithilfe von Prädikaten oder als Aufzählungsmengen.



Bei der Beschränkung auf eine Darstellungsweise ergeben sich Schwierigkeiten.

1) für i Abb. ist $vb(i) := \{a: \exists\, b \text{ mit } (a,b) \in i\}$

Namen in der klassischen Prädikatenlogik

Mit den in den beiden Vorkapiteln getroffenen Festlegungen können wir jetzt untersuchen, was geschieht, wenn wir leere oder mehrdeutige oder eindeutige Namen
als Namen von objektsprachlichen Zeichen in syntaktischen Festlegungen oder
als Namen von Bildern solcher Zeichen in interpretationssemantischen Festlegungen (auf)schreiben.
Was geschieht, wenn wir Festsetzungen mithilfe von mehrdeutigen, leeren oder auch eindeutigen Namen treffen?
Aufgrund verschiedener Adäquatheitsforderungen werde ich untersuchen ob leere oder mehrdeutige Namen unzulässig sind.

1. Syntaktische Festlegungen mithilfe von Namen

Unter syntaktischen Festlegungen mithilfe von Namen verstehe ich Festlegungen über Namen als Grundsymbole ($\in UA$), genauer Namen der Zeichen der Objektsprache.
Nur wenn die Grundsymbole Namen von etwas sind kann überhaupt (für etwas) etwas festgelegt werden.

Als Adäquatheitsbedingungen fordere ich:

1. Aussage- und Formelmengen sollen abgeschlossen bzgl. extensionsgleichen Ausdrücken (über UA) sein.
2. die Menge der Ableitungen soll abgeschlossen bzgl. Folgen von an entsprechender Stelle extensionsgleichen Ausdrücken sein.
3. Semantische Festlegungen (die Formeln Wahrheitswerte zuordnen) sollen extensionsgleichen Formel-Ausdrücken dieselben Wahrheitswerte zuordnen.

Ich fordere also, daß Aneinanderreihungen in Grundsymbolen (oder Folgen solcher), die sich höchstens in extensionsgleichen Namen unterscheiden, in ihren (klassischen)logischen Eigenschaften übereinstimmen.
Und werde feststellen für welche Namen das gilt.
Dabei beschränke ich mich auf Grundsymbolmengen, die eindeutige Ausdruckssysteme erzeugen (vgl.: Kap 00, Namenwörter).

Sei (N, Δ) Namenmenge (fest vorgegeben).

$\mathfrak{A}$ ALPHABET FÜR SYNTAKTISCHE FESTLEGUNGEN EINER SPRACHE 1. Stufe: gdw.
1) $\mathfrak{A}$ Alphabet einer Sprache 1. Stufe 2) $U\mathfrak{A} \leq N$ [1)]
2) N

$\mathfrak{o}$ SYNTAKTISCHE FESTLEGUNGEN EINER SPRACHE 1. Stufe: gdw
1) $\mathfrak{o} = (\mathfrak{A}, \cap, |Fo, Au)$ Sprache 1. Stufe
2) $\mathfrak{A}$ Alphabet für syntaktische Festlegungen einer Sprache 1. Stufe

Bem. 1: $(Z, \cap)$ Ausdrucksystem über $U\mathfrak{A}$, $\mathfrak{o}$ Festlegungen einer Sprache 1. Stufe $\mathfrak{o} = (\mathfrak{A}, \cap, |Fo, Au)$ Sprache 1. Stufe, dann $Au, |Fo \leq Z$

Bew.: Def. von $Au, |Fo$

Bem. 2: $(Z, \cap)$ Ausdrucksystem über $U\mathfrak{A}$ und kein Element von $U\mathfrak{A}$ Verlängerung eines anderen Elementes von $U\mathfrak{A}$ ist, dann ist $|Fo, Au, Ab$ wohldefiniert.

Bew.: $a=b \in Z > \exists a_i \in U\mathfrak{A}$ eindeutig mit $a = a_1 \hat{} \ldots \hat{} a_n = b >$ Beh.
Satz 4 Namenbücher

Sei im Folgenden stets $(U\mathfrak{A})^\cap$ Ausdrucksystem mit eindeutiger Faktoriesierung über $U\mathfrak{A}$. und $a_1 \ldots a_n := a_1 \hat{} \ldots \hat{} a_n$ für $a_i \in U\mathfrak{A}$.
Formel oder Aussage als Eigenschaft soll eindeutig für mithilfe der Ausdrücke über $U\mathfrak{A}$ Benanntes sein, d.h. $|Fo, Au$ sollen abgeschlossen bzgl. extensionsgleichen Ausdrücken über $U\mathfrak{A}$ sein:

$\mathfrak{o}$ SYNTAKTISCH ADÄQUAT: gdw
1) $\mathfrak{o} = (\mathfrak{A}, \cap, |Fo, Au)$ syntaktische Festlegungen einer Sprache 1. Stufe
2) $\forall a, b \in (U\mathfrak{A})^\cap$ mit a, b extensionsgleiche Ausdrücke und $a \in |Fo(Au)$ gilt $b \in |Fo(Au)$.

Satz 1: $(U\mathfrak{A})^\cap$ Ausdruckssystem mit eindeutiger Faktorisierung in $U\mathfrak{A}$
$\mathfrak{o} = (\mathfrak{A}, \cap, |Fo, Au)$ mit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{Il}, \mathfrak{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, V, \{, \}))$
syntaktisch adäquat:
$\mathfrak{Il}, \mathfrak{P}, \mathbb{V}, \{\neg\}, \{\vee, \rightarrow\}, \{V\}, \{\{\}, \{\}\}$ paarweise E-extensionsdisjunkt und $\forall x, y \in \mathbb{V}$ x, y extensionsgleich $> x = y$
Also bei eindeutiger Faktorisierbarkeit jedes Ausdrucks über dem Alphabet wird in syntaktisch adäquaten Sprachen 1. Stufe nicht zwischen gleichstelligen Junktoren unterschieden, aber (wegen der Unterscheidung Aussage-Formel) zwischen verschiedenen Variablen (verschiedene dürfen nicht extensionsgleich sein).

---

1) Wenn wir noch Hilfszeichen und Namen im Alphabet unterscheiden, ändert sich nichts außer, daß extensionsgleiche Ausdrücke in Hilfszeichen (gemäß Def.) übereinstimmen (z.B. $U\mathfrak{A} \vee \{\{, \}\} \leq N$ und $U\mathfrak{A} \leq Z$).

Bew. Satz 1: "$>$" Sei etwa $\mathbb{J}, \mathbb{P}$ nicht extensionsdisjunkt. also: $P \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{J}$;
a, P extensionsgleich $>$ $\{Pa\} \in \mathbb{F}o$ und $\{Pa\}, \{PP\}$ exgleich über $U\mathcal{A}$.

Angenommen $\{PP\} \in \mathbb{F}o >$ 1 $\{PP\} = \{P'a'\}$ mit $a' \in \mathbb{J} \cup \mathbb{V}$

$\underset{\text{eind.Fakt}}{>} P' = a' > \mathbb{P} \cap (\mathbb{J} \cup \mathbb{V}) \neq \emptyset$ Wid.

oder 2. $\{PP\} = \{\neg \Omega_1\}$ mit $\Omega_1 \in \mathbb{F}o > \mathbb{P} \cap \{\neg\} \neq \emptyset$ Wid.

oder 3. $\{PP\} = \{\Omega_1 \vee \Omega_2\}$ $[\{\Omega_1 \rightarrow \Omega_2\}]$ mit $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{F}o$

$> \{PP\} = a_1 \dots a_n$ mit $n > 4$ Wid. (eind. Fakt)

oder 4. $\{PP\} = \{\forall x\, \Omega_1\}$ mit $\Omega_1 \in \mathbb{F}o$ und $x \in \mathbb{V}$

$> \mathbb{P} \cap \{\forall\} \neq \emptyset$ Wid

Rest Analog

"$<$" Angenommen: Ω_1, Ω_2 extensionsgleich über $U\mathcal{A}$ und $\Omega_1 \in \mathbb{F}o, \Omega_2 \notin \mathbb{F}o$

Behauptung: $\mathbb{J}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, \{\neg\}, \{\vee, \rightarrow\}, \{\{\}, \{\}\}$ nicht paarweise extensionsdisjunkt.

Bew. durch Induktion über n.

$\Omega_1 = \{Pa\} > \Omega_2 = a_1 \dots a_4$ und $\{, a_1$; P, a_2 ; a, a_3 ; $\}, a_4$ extens. gleich mit $a \in \mathbb{J}(\mathbb{V})$ und $\{ \neq a_1$ oder $a_2 \notin \mathbb{P}$ oder $a_3 \notin \mathbb{J} \cup \mathbb{V}$ oder $\} \neq a_4$ ($\Omega_2 \notin \mathbb{F}o$)

$> U\mathcal{A} \setminus \{\{\}, \{\{\}$ oder $U\mathcal{A} \setminus \mathbb{P}, \mathbb{P}$ oder $U\mathcal{A} \setminus \mathbb{J}(\cup\mathbb{V}), \mathbb{J}(\cup\mathbb{V})$ oder

$U\mathcal{A} \setminus \{\}\}, \{\}\}$ nicht E-extensionsdisjunkt $>$ Beh

Sei nun $\forall \Omega_1, \Omega_2$ Ω_1, Ω_2 extensionsgleich über $U\mathcal{A}$ und $\Omega_1 \in \mathbb{F}o, \Omega_2 \notin \mathbb{F}o >$ (Bel)

1. Fall $\Omega_1 = \{\neg \Omega_1'\}$ mit $\Omega_1' \in \mathbb{F}o$ und $\Omega_2 = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in U\mathcal{A}$
$\Omega_2 \notin \mathbb{F}o >$ $\{, a_1$; $\neg, a_2$; $a_3 \dots a_{n-1}, \Omega_1'$; $\}, a_n$ ex. gleich über $U\mathcal{A}$
aber $\{ \neq a_1$ oder $\neg \neq a_2$ oder $a_3 \dots a_{n-1} \notin \mathbb{F}o$ oder $\} \neq a_n$
also $U\mathcal{A} \setminus \{\{\}, \{\{\}$ oder $U\mathcal{A} \setminus \{\neg\}, \{\neg\}$, oder $U\mathcal{A} \setminus \{\}\}, \{\}\}$ nicht E-exdisj.
(oder Beh. per Induktion)

2. Fall $\Omega_1 = \{\Omega_1' \vee \Omega_2'\}$ $[\{\Omega_1' \rightarrow \Omega_2'\}]$ mit $\Omega_1', \Omega_2' \in \mathbb{F}o$ $\Omega_2 = a_1 \dots a_n$ wie oben
$> \exists_k 1 < k < n$ mit $a_1, \{$; $a_2 \dots a_k, \Omega_1'$; $\vee, a_{k+1}$; $a_{k+2} \dots a_{n-1}, \Omega_2'$;
$\}, a_n$ extensionsgleich über $U\mathcal{A}$
aber (da $\Omega_2 \notin \mathbb{F}o$) $U\mathcal{A} \setminus \{\{\}, \{\{\}$ oder $U\mathcal{A} \setminus \{\vee\}$ $[U\mathcal{A} \setminus \{\rightarrow\}]$,
$\{\vee\}$ $[\{\rightarrow\}]$ oder $U\mathcal{A} \setminus \{\}\}, \{\}\}$ nicht E extensionsdisjunkt, oder
$a_2 \dots a_k, \Omega_1'$ exgleich und $a_2 \dots a_k \notin \mathbb{F}o$ oder $a_{k+2} \dots a_{n-1}, \Omega_2'$
exgleich und $a_{k+2} \dots a_{n-1} \notin \mathbb{F}o$ $\underset{\text{Ind.}}{>}$ Beh.

3. Fall $\Omega_1 = \{\forall x\, \Omega_2'\}$ mit $\Omega_1' \in \mathbb{F}o$ $\Omega_2 = a_1 \dots a_n$ wie oben
$> U\mathcal{A} \setminus \{\{\}, \{\{\}$; $U\mathcal{A} \setminus \{\forall\}, \{\forall\}$; $U\mathcal{A} \setminus \mathbb{V}, \mathbb{V}$ nicht E exdisj.
oder Ω_2', $a_4 \dots a_{n-1}$ exgleich und $a_4 \dots a_{n-1} \notin \mathbb{F}o$
oder $U\mathcal{A} \setminus \{\}\}, \{\}\}$ nicht E extensionsdisjunkt $\underset{\text{Ind.}}{>}$ Beh.

Bew. Satz 1. Fortsetzung
Bis jetzt gezeigt(Alphabetdarstellung eindeutig)
$\mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathbb{V}, \{\neg\}, \{\rightarrow, \vee\}, \{\forall\}, \{\varepsilon\}, \{\iota\}$ paarweise exdisjunkt $\not\exists$ $\mathbb{F}o$ abgeschlossen bzgl. exgleichen Reihen.

Beh.: $\mathfrak{A}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, \ldots$ etc. wie oben und $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{V}(x_1 \neq x_2 \rightarrow x_1, x_2$ exdisjunkt)
$\not\exists \Omega, \Omega'$ exgleich über $U\mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathbb{F}o \rightarrow fv(\Omega) = fv(\Omega')$

Bew.: $\rightarrow$
Induktion: $\{Pa\} = \Omega$, Ω' exgleich, $\Omega \in \mathbb{F}o \rightarrow \Omega' = a_1 \ldots a_4 \in \mathbb{F}o$
$\rightarrow fv(\{Pa\}) = fv(a)$ und $fv(\Omega') = fv(a_3)$ und
a, a_3 exgleich $\underset{\mathfrak{A}, \mathbb{V}\text{ exdisj.}}{\rightarrow} fv(a_3) = fv(a) = \phi$ oder
$a, a_3 \in \mathbb{V} \underset{\text{var}}{\rightarrow} \{a\} = \{a_3\} = fv(a_3) = fv(a)$

Sei $\forall \Omega, \Omega'$ Beh. richtig
$\{Vx\Omega_1\} = \Omega$, Ω' exgleich und $\Omega_1 \in \mathbb{F}o \rightarrow fv(\Omega) = fv(\Omega_1) \setminus \{x\}$
$\Omega' = \{Va_3 \ldots a_n$ und $a_5 \ldots a_{n-1}, \Omega_1$ exgleich, also $a_5 \ldots a_{n-1}, \Omega' \in \mathbb{F}o$
und x, a_3 exgleich und $a_3 \in \mathbb{V}$ also $a_3 = x$ und $fv(\Omega') = fv(a_5 \ldots a_{n-1}) \setminus \{x\}$
$\overset{\text{I.V.}}{=} fv(\Omega_1) \setminus \{x\} = fv(\Omega)$
Mithin gilt: $\Omega \in \mathbb{A}u$ und Ω, Ω_1 exgleich über $U\mathcal{A} \rightarrow \Omega' \in \mathbb{A}u$
Sei nun $x_1 \neq x_2$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$ und x_1, x_2 exgleich
dann gilt für $P \in \mathbb{P}$ $fv(\{Vx_1\{Px_2\}\}) = \phi$ und $frei(\{Vx_1\{Px_2\}\}) = \{x_2\} \neq \phi$
und $\{Vx_1\{Px_2\}\}, \{Vx_1\{Px_2\}\}$ exgleich aber nicht beide in $\mathbb{A}u$.

$\mathcal{K}$ SYNTAKTISCH FESTGELEGTER KALKÜL 1.Stufe: gdw
1) $\mathcal{K} = (\mathfrak{s}, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ Kalkül 1. Stufe
2) $\mathfrak{s}$ syntaktisch festgelegte Sprache 1. Stufe

$\mathcal{K}$ SYNTAKTISCH ADÄQUATER KALKÜL 1. Stufe: gdw
1) $\mathcal{K} = ((\mathfrak{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u), \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ Kalkül 1. Stufe
2) $\forall \Omega_i, \Omega'_i \in (U\mathcal{A})^{\frown}$ mit $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$
mit $\forall i\ \Omega_i, \Omega'_i$ extensionsgleich über $U\mathcal{A}$ und $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \in \mathbb{A}b$
gilt $(\Omega'_1, \ldots \Omega'_n) \in \mathbb{A}b$.

Also $\mathcal{K}$ ist syntaktisch adäquat, wenn die Menge der Ableitungen abgeschlossen ist bzgl. Folgen von extensionsgleichen Ausdrücken.

Satz 2: $\exists a, b \in (U\mathcal{A})^{\frown}$ mit $a \neq b$ und a, b extensionsgleich über $U\mathcal{A}$
$\rightarrow \mathcal{K}$ nicht syntaktisch adäquat für $\mathcal{K} = ((\mathfrak{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u), \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$.

Beweis: unter der Voraussetzung gibt es 2 verschiedene aber extensionsgleiche Formeln $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}' \in \mathbb{F}_o$, $\mathfrak{A}_2 \in \mathbb{F}_o$ beliebig, dann ist $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2)$ Ableitung aber $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2)$ ist keine Abtrennung und bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auch keine Ableitung, aber die Ausdrucksfolgen sind an entsprechenden Stellen extensionsgleich.

$\mathfrak{S}$ SEMANTIK FÜR SYNTAKTISCH FESTGELEGTE SPRACHE 1. Stufe $\mathfrak{s}$: gdw

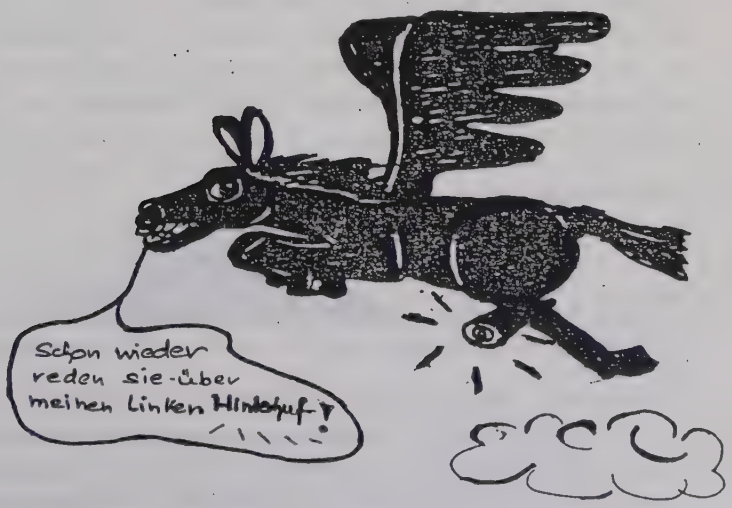
1) $\mathfrak{S}$ Semantik für $\mathfrak{s}$
2) $\mathfrak{s}$ syntaktisch festgelegte Sprache 1. Stufe

$\mathfrak{S}$ syntaktisch ADÄQUADETE SEMANTIK für $\mathfrak{s}$: gdw

1) $\mathfrak{S}$ Semantik für syntaktisch festgelegte Sprache $\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}, \cap, \mathbb{F}_o, /Au)$
2) $\forall \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathbb{F}_o \rightarrow \forall s \in \mathfrak{S}\ s(\mathfrak{A}_1) = s(\mathfrak{A}_2)$ exgleiche Ausdrücke über $U\mathfrak{A}$

Satz 3: $U\mathfrak{A}$ ohne extensionsgleiche Namen $\rightarrow \mathfrak{S}_{a_1}\mathfrak{S}_{a_2}$ syntaktisch adäquat für $\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}, \cap, \mathbb{F}_o, /Au)$

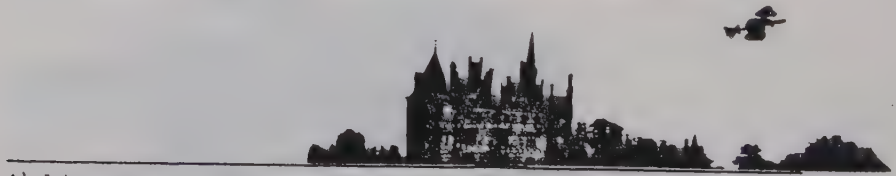
Vor $\rightarrow \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ exgleich über $U\mathfrak{A} \rightarrow [\forall a_i, b_i \in U\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_1 = a_1 \dots a_n$, $\mathfrak{A}_2 = b_1 \dots b_m \rightarrow \forall i\ a_i, b_i$ exgl. und $n = m] \underset{\text{Vor.}}{\rightarrow} \forall i\ a_i = b_i\ [U\mathfrak{A} \leq N]$.



-: .....!

2. Semantische Festlegungen mithilfe von Namen

Nachdem ich im 1. Teil die Adäquatheit der klassischen Prädikatenlogik für syntaktische Festlegungen mithilfe von leeren, mehrdeutigen oder eindeutigen Namen untersucht habe, werde ich jetzt die Adäquatheit von Interpretationen untersuchen, die mithilfe von Namen den Zeichen der Objektsprache etwas zuordnen.
Dort galt, daß Formel-, Aussage-, und Theorem-Menge (via Ableitung) abgeschlossen bzgl. extensionsgleichen Ausdrücken sein sollen.
Hier werde ich fordern, daß Interpretationen, die (evtl. via verschiedener Namen) dasselbe zuordnen und denselben Bereich haben, dieselben Wahrheitswertverteilungen induzieren sollen (Zielextensionalität). 1)
Die klassische Semantik ergibt sich zwar als zielextensional, wenn wir nur eindeutige Namen zulassen.
Aber es ist nur eine schwächere Einschränkung nötig. Damit läßt sich aber die Inadäquatheit des klassichen Kalküls für beliebige Namen nicht begründen (also auch nicht die Notwendigkeit seiner Modifikation), denn es gibt intuitive zielextensionale Semantiken für den klassischen Kalkül. Selbst wenn wir den Ausschluß von Namen fordern, für die zielextensional- und klassisch induzierte Wahrheitswertverteilungen divergieren können, ergibt sich keine Notwendigkeit für den generellen Ausschluß leerer oder mehrdeutiger Namen, ebensowenig wie das für die vollständige Charakterisierbarkeit der klassisch ableitbaren Formeln bzgl. dieser zielextensionalen Semantiken gilt.



1) Ich spreche von Zielextensionalität, für Extensionalität würde ich fordern, daß auch extensionsgleiche Ausdrücke (über U~~A~~), nicht nur gleiche Ausdrücke in ihren Wahrheitswerten übereinstimmen. Syntaktisch adäquate Kalküle enthalten nun aber keine verschiedenen extensionsgleichen Ausdrücke; für syntaktisch adäquate Sprachen ist also eine differenzierende Untersuchung nicht nötig.

2.1. Adäquatheit von semantischen Festlegungen für Interpretationen mithilfe von Namen.

Sei (N, Δ) Namenmenge

(U,i) INTERPRETATION MITHILFE VON NAMEN für σ : gdw
1) (U,i) Interpretation für σ
2) $U \subseteq N$

Es sei $\rho \in \{A, \ldots\}$, dann definiere ich:

$\mathfrak{S}_{J\rho}$ INTERPRETATIONSSEMANTIK ÜBER NAMEN für σ : gdw
1) $\mathfrak{S}_{J\rho}$ Semantik für σ
2) $\exists\, S_{J\rho}$ mit $S_{J\rho} : \{(U,i) : (U,i)$ Interpretation mithilfe von Namen für $\sigma\} \rightarrow \mathfrak{S}_{J\rho}$ Abbildung

Die Bilder der Zeichen einer Sprache 1. Stufe sind Elemente und Teilmengen des Bereiches. Je nachdem, wie wir die Extensionsgleichheit von Mengen auffassen (V-oder E-Extensionsgleichheit) ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für die Definition von Zielinarianz für Interpretationen [1] mithilfe von Namen.

für $\alpha, \beta \in \{V, E\}$

$(U,i)(U',i')$ $\alpha\beta$ ZIELINVARIANTE INTERPRETATION für σ : gdw
1) $(U,i)(U',i')$ Interpretationen für $\sigma = ((\exists, \mathbb{P}, \forall, (\neg, \vee, \rightarrow, \wedge, \leftrightarrow)),$
2) a) U, U' α-extensionsgleich
   b) $i|_{\exists \cup \forall}, i'|_{\exists \cup \forall}$ zielinvariant
   c) $i|_{\mathbb{P}}, i'|_{\mathbb{P}}$ β- β-zielinvariant

$\mathfrak{S}_{J\rho}$ $\alpha\beta$ ZIELEXTENSIONALE INTERPRETATIONSSEMANTIK für σ : gdw
1) $\exists\, \mathfrak{S}^{*}_{J\rho}$ mit $\mathfrak{S}^{*}_{J\rho} \leq \mathfrak{S}_{J\rho}$ und $\mathfrak{S}^{*}_{J\rho} = S_{J\rho}(\{(U,i) : (U,i)$ Interpret. mith. von Namen für $\sigma\})$ ist Interpretationsemantik über Namen für σ
2) $(U,i), (U',i')$ $\alpha\beta$ zielinvariante Interpretationen für $\sigma \Rightarrow$
$S_{J\rho}(U,i) = S_{J\rho}(U',i')$

---

1) Ich spreche also von ZIELinvarianz, weil wir auch Interpretationen über gleichen Objektsprachen betrachten können, die mithilfe von verschiedenen Alphabeten festgelegt sind. Wir können auch in diesem Sinne quelleninvariante Interpretationen betrachten.

2.1.1. Klassische Interpretationssemantik

Welche Arten von Namen müssen wir verbieten, damit die klassische Interpretationssemantik adäquat im Sinne von zielextensional ist? Welche der Namen müssen wir verbieten.: Leere und mehrdeutige? Dürfen wir nur eindeutige, nichtleere zulassen?

Satz 1:

a) $\mathfrak{S}_{J\mathfrak{A}}$ ist EV zielextensional für $\sim$ $\Leftrightarrow \forall M,M' \subseteq N$ (M,M' v-exgleich $\rightarrow M=M'$)

b) $\mathfrak{S}_{J\mathfrak{A}}$ ist VE zielextensional für $\sim$ $\Leftrightarrow \forall M,M' \subseteq N$ (M,M' v-exgleich und $M,M' \neq \emptyset$ $\rightarrow M=M'$)

c) $\mathfrak{S}_{J\mathfrak{A}}$ ist EE zielextensional für $\sim$ $\Leftrightarrow \forall n,n' \in N$ (n,n' exgleich $\rightarrow n=n'$)

Bew.: Sei $\sim = ((\exists, \mathbb{P}, \forall, (\neg, \vee, \rightarrow, \wedge, \leftrightarrow, \dagger), \wedge, |Fo|, |AU|)$

$\mathfrak{S}_{J\mathfrak{A}} \subseteq \{ s : |Fo| \rightarrow \{w,f\} \}$ klassische Interpretationssemantik für $\sim$

a) $\rightarrow$ Ang. $\exists M,M'$ mit $M=M'$ und M,M' V exgleich $\rightarrow \exists$ (ohne Einschränkung) $n_1 \in M'$ mit $n_1 \notin M$, also $n_1 \in M \cup M'$ und $n_1 \notin M$

$\mathbb{P} \neq \emptyset$ nach Vor., also sei $P_1 \in \mathbb{P}$

$i(P_1) = M \cup M'$, $i'(P_1) := M$ i,i' sonst beliebig und gleich in $M \cup M'$

$(M \cup M', i), (M \cup M', i')$ EV zielinvariant für $\sim$

aber $S_{J\mathfrak{A}}(M \cup M', i)(\langle \forall x \{\neg\{P_1 x\}\}\rangle) = f$, weil $\forall n \in M \cup M'$ $n \in i(P_1) = M \cup M'$

und $S_{J\mathfrak{A}}(M \cup M', i')(\langle \forall x \{\neg\{P_1 x\}\}\rangle) = w$, weil $n_1 \in M \cup M'$ und $n_1 \notin i'(P_1) = M$

also $\mathfrak{S}_{J\mathfrak{A}}$ nicht EV zielextensional

$\leftarrow$ Seien $(U,i), (U',i')$ EV zielinvariant für $\sim$

U,U' E extensionsgleich $\rightarrow U,U'$ V extensionsgleich $\rightarrow U=U'$

$\forall a \in J \cup V$ $i(a), i'(a)$ exgleich $\rightarrow \{i(a)\}, \{i'(a)\}$ V extensionsgleich $\rightarrow i(a)=i'(a)$

$\forall P \in \mathbb{P}$ $i(P), i'(P)$ V exgleich $\rightarrow i(P)=i'(P)$

$\rightarrow (U,i)=(U',i')$ $S_{J\mathfrak{A}}(U,i) = S_{J\mathfrak{A}}(U',i')$

b) $\leftarrow$ Ang. $\exists M,M'$ mit M,M' V exgleich und $M \neq \emptyset$ und $M' \neq \emptyset$

Sei $P_1 \in \mathbb{P}$ $i(P_1)=M$ sonst i beliebig mit (M,i) Interpret über Namen für $\sim$ $(M,i), (M \cup M', i)$ VE zielinvariante Interpretationen für $\sim$

und $S_{J\mathfrak{A}}(M,i)$ $(\langle \forall x \{\neg\{P_1 x\}\}\rangle) = f \neq S_{J\mathfrak{A}}(M \cup M', i)$ $(\langle \forall x \{\neg\{P_1 x\}\}\rangle) = w$

$\langle$ Seien (U,i), (U',i') VE zielinvariant U,U' V exgleich und $U,U' \neq \emptyset \rangle_{Vor.}$ U=U'

$\forall$ a$\in\exists_0\forall$ i(a),i'(a) exgleich $\rangle$ $\{i(a)\},\{i'(a)\}$ V exgleich $\rangle_{Vor.}$ i(a)=i'(a)

$\forall$ $\in\mathbb{P}$ i(P),i'(P) E exgleich

a) $i(P)=\emptyset \rangle \{\tilde{\Delta}(n):n\in i(P)\}=\emptyset=\{\tilde{\Delta}(n):n\in i'(P)\} \rangle$ i(P)= i'(P)=$\emptyset$

b) $i(P)\neq\emptyset \rangle i'(P)\neq\emptyset \rangle_{Vor.}$ i(P)=i'(P)

c) $\rangle$ Ang. $\exists$ $n_1\neq n_2$ mit n_1, n_2 extensionsgleich

$P_1\in\mathbb{P}$ und $i(P_1):=\{n_1\}$ und $(\{n_1\},i)$ Interpret mit i sonst beliebig für $\sim$

$\rangle$ $(\{n_1,n_2\},i),(\{n_1\},i)$ EE zielinvariante Interpret. für $\sim$

und $S_{J\mathfrak{L}}((\{n_1,n_2\},i))(\{\forall x\{\neg(Px)\}\})=w\neq S_{J\mathfrak{L}}((\{n_1\},i))(\{\forall x\{\neg(Px)\}\})=f$

$\langle$ Ang. $\exists$ M,M' mit M,M' E extensionsgleich, $M\neq M'$

o.E. $\exists$ $n_1\in M$ und $n_1\notin M' \rangle_{exgl.} \exists$ $n_1'\in M'$ mit $\tilde{\Delta}(n_1)=\tilde{\Delta}(n_1')$

$\rangle_{n_1\notin M'} n_1\neq n_1'$ also $\exists$ n_1 n_1' mit $\tilde{\Delta}(n_1)=\tilde{\Delta}(n_1')$ $\lightning$ (Widerspruch zur Vor.)

also $\forall$ M,M'(M,M' E extensionsgleich $\rangle$ M=M') $\rangle$

(U,i),(U',i') EE zielinvariant $\rangle$ (U,i)=(U',i') $\rangle$ Beh.

Bem.: $\forall M,M'\subseteq N\,(M,M'$ V extensionsgleich $\rangle M=M') \rangle \forall n\in N(\tilde{\Delta}(n)\neq\emptyset)$

Bew: Für $M=\emptyset$ $M'=\{n\}$ mit $\tilde{\Delta}(n)\neq\emptyset$ gilt M,M' V exgleich und $M\neq M'$.

Bem.: $(M,M'$ V extensionsgleich und $M,M'\neq\emptyset \rangle M=M') \rangle (\tilde{\Delta}(n)=\tilde{\Delta}(m) \rangle n=m)$

Also Satz 1.bedeutet:

wenn es leere Namen gibt, ist $S_{J\mathfrak{L}}$ nicht EV zielextensional

wenn es verschiedene extensionsgleiche Namen gibt, ist es nicht EE zielextensional

Also: wir müssen leere Namen ausschließen, wenn wir VE-Zielextensionalität als Adäquatheitsdingung für die klassische Interpretationssemantik (für Interpretationen mithilfe von Namen fordern).

Wenn allerdings mit mehrdeutigen Namen, anders als hier definiert wurde, gemeint wäre: mehrere Namen für eine Extension, dann müssen in diesem Sinne mehrdeutige Namen für die EE-Zielextensionalität ausgeschlossen werden.

Aber, wie der Beweis des Satzes 1 zeigt, gilt:

$\mathfrak{S}_{J_2}$ VE zielextensional $\rightarrow \forall (U,i),(U',i')$ VE zielinvariant $\rightarrow (U,i) = (U',i')$

$\mathfrak{S}_{J_2}$ EE zielextensional $\rightarrow (U,i)(U',i')$ EE zielinvariant $\rightarrow (U,i) = (U',i')$

Also: nur wenn es überhaupt keine verschiedenen VE bzw EE zielinvarianten Interpretationen gibt, ist $\mathfrak{S}_{J_2}$ (VE,EE)adäquat.

Fazit:

1. Es gibt Adäquatheitsforderungen, für die weder leere noch mehrdeutige Namen generell ausgeschlossen werden müssen.
2. Es gibt Adäquatheitsforderungen, die den Ausschluß leerer Namen generell fordern (VE Zieladäquatheit)
3. mehrdeutige Namen können in jedem Fall problematisch werden.
4. mehrdeutige Namen müssen in keinem Fall generell ausgeschlossen werden.
5. Jede der Adäquatheitsforderungen ist nur erfüllt, wenn es keine (im Sinne der entsprechenden Adäquatheitforderung) verschiedenen zielinvarianten Interpretationen gibt.

Wir können also auch hier, wie für die syntaktischen Festlegungen, (die nur adäquat sind, wenn es keine verschiedenen extensionsgleichen Namen gibt) die Frage aufwerfen, in welchem Sinne überhaupt von der Verwendung von Namen gesprochen werden kann -in Abhängigkeit von Denotaten etwas festgelegt wird-, wenn wir ausschließen müssen, daß auf verschiedene Weise(hier via verschiedener, zielinvarianter Interpretationen) über diese Denotate gesprochen oder geschrieben werden kann.

Schließlich gilt aber, daß auch um den Kalkül adäquat bei Zulassung beliebiger Namenmengen zu machen, nicht unbedingt die Syntax geändert werden muß. Es gibt intuitive, adäquate Interpretationssemantiken.

2.1.2. Nichtklassische Interpretationssemantik

Angenommen es gäbe mehrere oder keine Hänse. Dann können wir „Hans singt" als wahr betrachten, wenn

1) jede Ersetzung von „Hans" in „Hans singt" durch einen Namen der alle Hänse bezeichnet, den Wahrheitswert nicht ändert($S_{J\in}$)
("Hans singt" ist wahr für alles was "Hans" heißt)
2) alle Hänse (wenn es welche gibt oder nicht) singen($S_{J\subseteq}$)
3) es gibt mindestens einen Hans und alle Hänse singen($S_{J\subseteq_2}$)
4) es gibt einen Hans und der singt($S_{J\cap_1}$)
5) es gibt keine Hänse oder es gibt einen der singt($S_{J\cap_2}$)

Sei:
(N, Δ) Namenmenge,
$\Delta = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \vee, t, \dagger), \cap, \mathfrak{Fo}, \mathfrak{Au})$ Sprache 1. Stufe,
$\mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}} \subseteq \{S : S : \mathfrak{Fo} \rightarrow \{w, f\}\}$ klassische Interpretationssemantik

dann definiere ich für
$p \in \{\in, \subseteq_1, \subseteq_2, \cap_1, \cap_2\}$:
$S_{Jp} : \{(U,i) : (U,i)$ Interpretation mithilfe von Namen für $\Delta\}$
$\rightarrow \{S : S : \mathfrak{Fo} \rightarrow \{w,f\}$ Abbildungen$\}$

mit:

für $B \in \mathfrak{P}$ $a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$

$S_{J\in}(U,i)(\dagger B a\dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} oi(a) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(B)\}$

$S_{J\subseteq_1}(U,i)(\dagger B a\dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} oi(a) \subseteq \bigcup_{n\in i(B)} \tilde{\Delta}(n)$

$S_{J\subseteq_2}(U,i)(\dagger B a\dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} oi(a) \subseteq \bigcup_{n\in i(B)} \tilde{\Delta}(n)$ und $\tilde{\Delta} oi(a) \neq \emptyset$

$S_{J\cap_1}(U,i)(\dagger B a\dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} oi(a) \cap \bigcup_{n\in i(B)} \tilde{\Delta}(n) \neq \emptyset$

$S_{J\cap_2}(U,i)(\dagger B a\dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} oi(a) \cap \bigcup_{n\in i(B)} \tilde{\Delta}(n) \neq \emptyset$ oder $\tilde{\Delta} oi(a) = \emptyset$

und $S_{Jp}(U,i)(\dagger \neg \Omega_1 \dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; S_{Jp}(\Omega_1) = f$ für $\Omega \in \mathfrak{Fo}$

$S_{Jp}(U,i)(\dagger \forall x\, \Omega \dagger) = w \;\not\Leftrightarrow\; \exists n \subseteq U$ mit $S_{Jp}(U, i^n_x)(\Omega) = w$

wobei $i^n_x(a) = \begin{cases} n & \text{für } a = x \\ i(a) & \text{für } a \neq x \end{cases}$ $\forall a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$

etc wie üblich.

für $p \in \{\varepsilon, s_1, s_2, n_1, n_2\}$

$\mathfrak{S}_{Jp} := S_{Jp}(\{(U,i)$ mit (U,i) Interpretation mithilfe von Namen für $\mathfrak{s}\})$

ohne Einschränkungen für $\mathfrak{s}$ oder (N,Δ) gilt:

Satz 1: a) $\mathfrak{S}_{Jp}$ EE zielextensional für $\mathfrak{s}$ $\forall p \in \{\varepsilon, s_1, s_2, n_1, n_2\}$

b) $\mathfrak{S}_{Js_{1,2}}$ EV zielextensional für $\mathfrak{s}$

c) $\mathfrak{S}_{Jn_{1,2}}$ EV zielextensional für $\mathfrak{s}$

Bew: a) z.z. $(U,i)(U',i')$ EE zielinvariant für $\mathfrak{s} \Rightarrow \forall \Omega \in \mathbb{F}o\,(S_{Jp}(U,i)(\Omega) = S_{Jp}(U',i')(\Omega))$

Induktion: Sei $P \in \mathbb{P}$ $a \in \mathfrak{J} \cup \mathbb{V}$ $\mathfrak{s} = (\mathfrak{J}, \ldots)$ wie oben.

$S_{J\varepsilon}(U,i)(\{Pa\}) = w \Leftrightarrow \tilde{\Delta}\circ i(a) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$

$\quad\quad \| \text{ vor.} \quad\quad\quad \| \text{ vor.}$

$\tilde{\Delta}\circ i'(a) \quad \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i'(P)\} \Leftrightarrow S_{Jp}(U',i')(\{Pa\}) = w$

Sei $\forall \Omega \in \mathbb{F}o\ \forall (U,i),(U',i')\ ((U,i),(U',i')$ EE zielinvariant $S_{J\varepsilon}(U,i)(\Omega)$
$= S_{J\varepsilon}(U',i')(\Omega))$

$S_{J\varepsilon}(U,i)(\{\forall x\,\Omega\}) = w \Leftrightarrow \exists n \in U$ mit $S_{J\varepsilon}(U,i\tfrac{n}{x})(\Omega) = w$

$\Rightarrow \exists n^* \in U'$ mit $(U,i\tfrac{n}{x}),(U',i'\tfrac{n^*}{x})$ EE zielinvariant für $\mathfrak{s}$

$\underset{\text{J.V.}}{\Rightarrow} S_{J\varepsilon}(U,i\tfrac{n}{x})(\Omega) = S_{J\varepsilon}(U',i'\tfrac{n^*}{x})(\Omega) \Rightarrow S_J(U',i')(\forall x\,\Omega) = w$

Rest trivial

b) Sei $(U,i),(U',i')$ EV zielinvariant für $\mathfrak{s}$, $P \in \mathbb{P}$, $a \in \mathfrak{J} \cup \mathbb{V}$ $[\mathfrak{s} = (\mathfrak{J} \ldots \Delta)]$

$S_{Js_1[2]}(U,i)(\{Pa\}) = w \Leftrightarrow \tilde{\Delta}\circ i(a) \subseteq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n)\ [\tilde{\Delta}\circ i(a) \neq \emptyset]$

$\quad\quad \|$

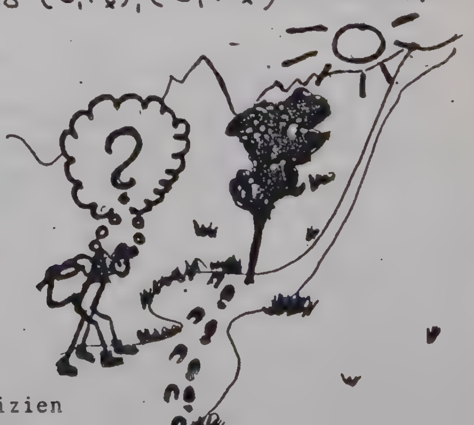
$\tilde{\Delta}\circ i'(a) \quad \bigcup_{n \in i'(P)} \tilde{\Delta}(n) \Leftrightarrow S_{Js_1[2]}(U',i')(\{Pa\}) = w$

$S_{Js_1[2]}(U,i)(\{\forall x\,\Omega\}) = w \Leftrightarrow \exists n \in U$ mit $S_{Js_{1,2}}(U,i\tfrac{n}{x})(\Omega) = w$

$\Rightarrow \exists n^* \in U'$ mit $\tilde{\Delta}(n) = \tilde{\Delta}(n^*)$ also $(U,i\tfrac{n}{x}),(U',i'\tfrac{n^*}{x})$ EV zielinv. für $\mathfrak{s}$

$\underset{\text{J.V.}}{\Rightarrow}$ Beh

Rest ebenso



Indizien

$\cup$ AUTONYME NAMENMENGE : gdw
1) $\cup$ Namenmenge
2) $\forall n \in \cup \; \forall m \in nb(a) \; ((n,m) \in a \not\leftrightarrow n = m)$

Für jede Interpretation mithilfe von nur autonymen Namen, $(\cup, i)$ mit $\cup$ enthält nur autonyme Namen, stimmen die nichtklassichen Wahrheitswertverteilungen untereinander und mit der klassischen (für diese Interpretation) überein. Wenn es nur solche Namen gibt, sind die Semantiken nicht verschieden.[1)]

Satz 2:
Für autonyme Namenmengen $\cup$ und Interpretationen $(\cup, i)$ für $\circ$ gilt:
$S_{J\circ}(\cup,i) = S_{J\bullet}(\cup,i) = S_{Js_1}(\cup,i) = S_{Js_2}(\cup,i) = S_{Jn_1}(\cup,i) = S_{Jn_2}(\cup,i)$

Bew. $\cup$ autonym $\rightarrow$ $\tilde{\Delta} \circ i(a) = \{i(a)\} \quad \forall a \in \mathcal{U} \cup \forall$
$\bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n) = \bigcup_{n \in i(P)} \{n\} = i(P)$
$\{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\} = \{\{n\} : n \in i(P)\}$

mithin: $i(a) \in i(P) \not\leftrightarrow \{\{i(a)\}\} \in \{\{n\} : n \in i(P)\} \not\leftrightarrow \tilde{\Delta} \circ i(a) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$
2. $\not\leftrightarrow \{i(a)\} \cap i(P) \neq \phi \not\leftrightarrow \tilde{\Delta} \circ i(a) \cap \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n) \neq \phi \quad (\tilde{\Delta}(n) \neq \phi)$
3. $\not\leftrightarrow \{i(a)\} \subseteq i(P) \not\leftrightarrow \tilde{\Delta} \circ i(a) \subseteq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n)$

Rest gem. Def.

Bemerkung:
Wenn es nichtleere und einen leeren Namen gibt, ist keine der Semantiken VE-zielextensional,
wenn es nur leere Namen gibt, ist jede Semantik VE zielextensional,
und jede bis auf $S_{J\bullet}$ VV zielextensional.

Satz 3:
1) $\tilde{\Delta}(N) \neq \phi$ und $\exists n \in N \; \tilde{\Delta}(n) = \phi$ $\rightarrow$ für $p \in \{s_1, s_2, n_1, n_2\}$ S_{Jp} nicht VE zielextensional

2) $\tilde{\Delta}(N) = \phi$ $\rightarrow$ a) S_{Jp} VE zielextensional für $p \in \{c, s_1, s_2, n_1, n_2\}$

b) S_{Jp} VV zielextensional für $p \in \{s_1, s_2, n_1, n_2\}$

d) $S_{J\bullet}$ nicht VV zielextensional

---

1) dann ist aber das Problem der mehrdeutigen Namen in der klassischen Logik hinfällig.

Bew:

1.) $U := N \quad U' := N \setminus \{n : \tilde{\Delta}(n) = \emptyset\}$ ($\neq \emptyset$ nach Vor.)

$i(P) := U' \quad i'(P) := \emptyset \quad \forall P \in \mathbb{P} \quad i(a) = i'(a) = n_1 \in U'$ (bel) $\forall a \in \mathcal{Y} \cup \mathcal{V}$

$\Rightarrow$ a) $\emptyset = \tilde{\Delta}(n_1) \notin \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\} = N \setminus \{\tilde{\Delta}(n) : \tilde{\Delta}(n) = \emptyset\}$

$$\Rightarrow S_{J\, \in\, \leq_2\, n_1} (U, i)(\{V x \{\neg \{P x\}\}\}) = w$$

und $\forall n \in U' \quad \tilde{\Delta}(n) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$

$$\Rightarrow S_{J\, \notin\, \leq_2\, n_1} (U', i)(\{V x \{\neg \{P x\}\}\}) = f$$

und $(U, i), (U', i)$ VE zielinvariant für $\cap$

$\Rightarrow$ b) $\emptyset = \tilde{\Delta}(n_1) \leq \bigcup_{n \in i'(P)} \tilde{\Delta}(n) = \emptyset \Rightarrow S_{J\, \leq_1\, n_2} (U, i)(\{V x \{P x\}\}) = w$

$$S_{J\, \leq_1\, n_2} (U', i')(\{V x \{P x\}\}) = f$$

2) a) $(U, i), (U', i')$ VE zielinvariant für $\cap$ $\underset{\text{Vor}}{\Rightarrow}$ $U \neq \emptyset$ und $U' \neq \emptyset$

und $\{\tilde{\Delta}(n) : n \in U\} = \{\tilde{\Delta}(n) : n \in U'\} = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow (U, i), (U', i')$ EE zielinvariant $\underset{\text{Satz 1.}}{\Rightarrow}$ Beh.

b) $(U, i), (U', i')$ VV zielinvariant $\underset{\text{wie a)}}{\Rightarrow}$ $(U, i), (U', i')$ EV zielinvariant. $\underset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow}$ Beh

c) $U := N \quad i(P) := N \quad i'(P) := \emptyset \quad \forall P \in \mathbb{P}$ sonst i, i' beliebig,
so daß $(U, i), (U, i')$ Interpretationen für Namen für $\cap$

$\Rightarrow S_{J \in} (U, i)(\{V x \{P x\}\}) = w$

$S_{J \in} (U, i')(\{V x \{P x\}\}) = f$

$(U, i), (U', i')$ VV zielinvariant.

2.2. Quasiadäquatheit der klassischen Interpretationssemantik

Was wir schreiben und was wir zu schreiben meinen, sind vielleicht ganz verschiedene Dinge.
Sollten die klassischen Wahrheitsfestlegungen, so gedacht, gemeint sein, von allen außer mir, wie eine der zieladäquaten?
Welche Namen müßten wir verbieten, damit für jede Interpretation mithilfe von Namen, die klassische Wahrheitswertverteilung (wie ich sie verstanden habe) mit einer (ziel-) extensionalen übereinstimmt?

Sei $p \in \{\varepsilon, S1, S2, n1, n2\}$; $\alpha,\beta \in \{V,E\}$ $\sigma = (G, P, \ldots$) Sprache 1.Stufe

$S_{J\alpha}$ p, α, β ZIELEXTENSIONAL für σ : gdw
1) $\forall (U,i)$ mit (U,i) Interpretation mithilfe von Namen gilt $S_{J\alpha}(U,i) = S_{J\beta}(U,i)$

2) S_{Jp} ist $\alpha\beta$ zielextensional.

$S_{J\alpha}$ QUASIZIELEXTENSIONAL für σ : gdw
$\exists p \in \{\varepsilon, S1, S2, n1, n2\}$, $\exists \alpha,\beta \in \{V,E\}$, so daß $S_{J\alpha}$ $p\alpha\beta$ zielextensional für σ

Ich definiere jetzt noch 3 Eigenschaften von Namenmengen

U OHNE EXTENSIONSGLEICHE NAMEN: $\nexists$ $\forall n,n' \in U$ (n,n' Namen u. n,n' extgleich $> n=n'$)

U NUR EXTENSIONSDISJUNKTE NICHTLEERNAMEN: $\nexists$ $\forall n \in U$ n nichtleerer Name
$\forall n,n' \in U$ ($\tilde{\sigma}(n) \cap \tilde{\sigma}(n') \neq \phi > n=n'$)

U MIT EXTENSIONEN-REPRÄSENTANTEN SYSTEM $\nexists$ $\forall n \in U$ n nichtleerer Name
$\forall n\, \exists o \forall n'$ ($n,n' \in U, o \in nb(\sigma)$, $o \in \tilde{\sigma}(n) \cap \tilde{\sigma}(n') > n = n'$)

Bem. 1: U nur extensionsdisjunkte nichtleere Namen
$>$ U mit Extensionenrepräsentantensystem.

Bew.: 1) $\forall n \in U$ $\tilde{\sigma}(n) \neq \phi$
2) $\forall o \in nb(\sigma)$ $\forall n' \in U$ gilt $o \in \tilde{\sigma}(n) \cap \tilde{\sigma}(n') > n = n'$.

Bem. 2: U ohne Extensionenrepräsentantensystem und U Namenmenge
$\nexists$ $\exists M,n$ ($M \subseteq U \subseteq N$, $n \in U$ mit $M \cap \{n\} = \phi$ und $\tilde{\sigma}(n) \subseteq \bigcup_{n \in M} \tilde{\sigma}(n)$)

also: U mit Exrep.system gdw keine Extension eines Namens, Extension einer Namenmenge ist, in der dieser nicht vorkommt.

Bew.: $\Rightarrow$' $U \subseteq N$ U ohne Repräsentantensystem $\Leftrightarrow \exists n\, \tilde{\Delta}(n) = \phi, n \in U$
" oder $\exists n \forall o \exists m$ ($n, m \in U$ und $o \in \tilde{\Delta}(n) \cap \tilde{\Delta}(m)$ und $n \neq m$

$M := \{m : m \in U \text{ und } \tilde{\Delta}(n) \neq \Delta(m)\}$
$\Rightarrow \tilde{\Delta}(n) \subseteq \bigcup_{m \in M} \tilde{\Delta}(m)$ und $M \cap \{n\} = \phi$
$\Leftarrow$' $\exists n$ mit $n \in U$ und $\{n\} \cap M = \phi$ und $M \subseteq U$
und $\tilde{\Delta}(n) \subseteq \bigcup_{n \in M} \tilde{\Delta}(n)$ $\Rightarrow \tilde{\Delta}(n) = \phi$ oder $\exists m \in M$ mit $\tilde{\Delta}(n) \cap \tilde{\Delta}(m) \neq \phi$
also $n \neq m$ und $\tilde{\Delta}(n) \cap \tilde{\Delta}(m) \neq \phi$ $\Rightarrow$ Beh

Satz 4: a) N ohne extensionsgleiche Namen $\Leftrightarrow \mathfrak{S}_{J_2} \in EE$ zielextensional für $\sim$
b) N mit Extensionenrepräsentantensystem
$\Leftrightarrow \mathfrak{S}_{J_2} \leq_1 EV$ zielextensional für $\sim$
c) N nur mit extensionsdisjunkten nichtleeren Namen
$\Leftrightarrow \mathfrak{S}_{J_2} \cap_2 EV$ zielextensional für $\sim$

Bew: „$\Rightarrow$"
Sei (U, i) Interpretation mithilfe von Namen für $\sim$ ($\sim$ wie oben)

Induktion: $P \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{U} \cup \mathbb{W}$

$S_{J_2}(U,i)(\langle Pa \rangle) = w \Leftrightarrow i(a) \in i(P) \underset{\text{vora)}}{\Rightarrow} \tilde{\Delta}(i(a)) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$
$\underset{\text{vonb)}}{\Rightarrow} \tilde{\Delta}(i(a)) \subseteq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n)\ [\tilde{\Delta} \circ i(a) \neq \phi]$
$\underset{\text{vorc)}}{\Rightarrow} \tilde{\Delta}(i(a)) \cap \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n) \neq \phi\ [\tilde{\Delta} \circ i(a) = \phi]$
$\Rightarrow S_{J_P}(U,i)(\langle Pa \rangle) = w$

a) $S_{J_2}(U,i)(\langle Pa \rangle) = f$ und $S_{J_{\subseteq}}(U,i)(\langle Pa \rangle) = w$
$\Rightarrow i(a) \notin i(P)$ und $\tilde{\Delta} \circ i(a) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$
also $\exists n \in i(P) \neq i(a)$ mit $\tilde{\Delta}(i(a)) = \tilde{\Delta}(n)$
also $\exists n \neq i(a)$ mit $\tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta}(n)$ $\lightning$

b) $S_{J_2}(U,i)(\langle Pa \rangle) = f$ und $S_{J_{\leq_1}}(U,i)(\langle Pa \rangle) = w$
$\Rightarrow i(a) \notin i(P)$ und $\phi \neq \tilde{\Delta} \circ i(a) \subseteq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n)$
also $\exists n \in i(P)$ und $o \in \tilde{\Delta} \circ i(a) \cap \tilde{\Delta}(n) \underset{\text{vor}}{\Rightarrow} n = i(a) \in i(P)$ $\lightning$

c) $S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\ulcorner Pa\urcorner) = f$ und $S_{J n_1}(U,i)(\ulcorner Pa\urcorner) = w$

$\Rightarrow i(a) \notin i(P)$ und $(\phi+)$ $\tilde{z}(i(a)) \cap \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{z}(n) \neq \phi$, also $\exists n \in i(P)$ $\tilde{z}(i(a)) \cap \tilde{z}(n) \neq \phi \Rightarrow i(a) = n$ ↯

Sei nun $\rho \in \{\varepsilon, s_1, s_2, n_1, n_2\}$ und $\forall \Omega$ $\Omega \in$ Fo $S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\Omega) = S_{J\rho}(U,i)(\Omega)$ bei entsprechenden Voraussetzungen für

$S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\ulcorner \neg\Omega \urcorner) = w \Leftrightarrow S_{J\rho}(U,i)(\Omega) = f \underset{J,V}{=} S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\Omega) \Leftrightarrow S_{J\rho}(U,i)(\ulcorner \neg\Omega \urcorner) = w$

$S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\ulcorner \forall x \Omega \urcorner) = w \Leftrightarrow \exists n \in N$ mit $S_{J\mathfrak{A}}(U, i\frac{n}{x})(\Omega) = w \underset{J,V}{=} S_{J\rho}(U, i\frac{n}{x})(\Omega)$

$\Rightarrow \exists n \in N$ mit $S_{J\rho}(U, i\frac{n}{x})(\Omega) = w \Rightarrow$ Bah.

Rest ebenso.

ad

a) n_1, n_2 verschiedene extensionsgleiche Namen.

$P \in \mathbb{P}$ $i(P) := \{n_1\}$ $U := \{n_1, n_2\}$ sonst i beliebig (U,i) Interpret

Namen für σ

$\Rightarrow S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\ulcorner \forall x \ulcorner \neg \ulcorner P x \urcorner \urcorner \urcorner) = w$, da $n_2 \notin \{n_1\}$

und $S_{J\varepsilon}(U,i)(\ulcorner \forall x \ulcorner \neg \ulcorner P x \urcorner \urcorner \urcorner) = f$, da $\forall n \in U = \{n_1, n_2\}$ $\tilde{z}(n) = \tilde{z}(n_1)$

$\Rightarrow S_{J\mathfrak{A}}(U,i) \neq S_{J\varepsilon}(U,i)$

b) $n_1 \in N$ $\tilde{z}(n_1) = \phi$ $U := \{n_1\}$ $i(P_1) := \phi$

$\Rightarrow S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\ulcorner \forall x \ulcorner P x \urcorner \urcorner) = f$

und $S_{J s_1}(U,i)(\ulcorner \forall x \ulcorner P x \urcorner \urcorner) = w$, da $\phi = \tilde{z}(n_1) \leq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{z}(n)$

$U' := \{n_1\}$ $i'(P) := \{n_1\}$

$\Rightarrow S_{J\mathfrak{A}}(U',i')(\ulcorner \forall x \ulcorner P x \urcorner \urcorner) = w$

und $S_{J s_2}(U',i')(\ulcorner \forall x \ulcorner P x \urcorner \urcorner) = f$, da $\forall n \in \{n_1\} = U'$ $\tilde{z}(n) = \phi$ oder $\tilde{z}(n_1) \leq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{z}(n)$

wähle M, n_1 wie in Bem 2 (N ohne Extensionenrepräsentantensystem)

$U := M \cup \{n_1\}$ $i(P) := M \Rightarrow S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\ulcorner \forall x \ulcorner \neg \ulcorner P x \urcorner \urcorner \urcorner) = w$

$S_{J s_1}(U,i)(\ulcorner \forall x \ulcorner \neg \ulcorner P x \urcorner \urcorner \urcorner) = f$ da $\tilde{z}(n_1) \leq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{z}(n)$

c) $\exists n$: $\tilde{z}(n) = \phi$ oder $\exists n \neq m$ mit $\tilde{z}(n) \cap \tilde{z}(m) \neq \phi$

$\overset{!}{\Rightarrow} \exists (U,i)$ $S_{J\mathfrak{A}}(U,i) \neq S_{J n_1}(U,i)$

1) $\exists n. \neq m \quad \tilde{a}(n) \cap \tilde{a}(m) \neq \phi$
$U := \{n,m\} \quad i(P) := \{n\} > S_{J\mathfrak{A}_2}(U,i)(\{\forall x\{\neg Px\}\}) = w \quad (m \notin \{n\} = i(P))$

und $S_{J\mathfrak{A}_2}(U,i)(\{\forall x\{\neg Px\}\}) = f$

da $\forall o \in \{n,m\} \quad \tilde{a}(o) \cap \tilde{a}(m) \neq \phi \neq \tilde{a}(n) \cap \tilde{a}(n)$

2) $\exists n$ mit $\tilde{a}(n) = \phi$
$U := \{n\} \quad i(P) := \{n\} > S_{J\mathfrak{A}_2}(U,i)(\{\forall x\{Px\}\}) = w$

und $S_{J\mathfrak{A}_1}(U,i)(\{\forall x\{Px\}\}) = f$

$i'(P) := \phi > S_{J\mathfrak{A}}(U,i')(\{\forall x\{Px\}\}) = f$

und $S_{J\mathfrak{A}_2}(U,i)(\{\forall x\{Px\}\}) = w$

Satz 8: $\exists n \ \tilde{a}(n) = \phi, n \in U, R \subseteq \left(\{\tilde{a}(n) : n \in N\} \times \{\bigcup_{n \in M} \tilde{a}(n) : M \subseteq R\}\right)$ beliebig
$> \exists (U,i)$ mit $S_{J\mathfrak{A}}(U,i) \neq S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i)$.

D.h. Wir können die klassischen Wahrheitsbedingungen nicht intuitiv mit mit einer extensionalen Beziehung R verknüpfen, mit $R \subseteq \{\tilde{a}(n) : n \in N\} \times \{\bigcup_{n \in M} \tilde{a}(n) : M \subseteq N\}$ und "i(a)∈i(P)" deuten oder verstehen als $(\tilde{a}\text{-}i(a), \bigcup_{n \in M} \tilde{a}(n)) \in R$, WENN ES LEERE NAMEN GIBT. Für $S_{J\mathfrak{A}_R}$ analog zu $S_{J\mathfrak{A}}$ definiert, gilt für $n \in U$ und $\tilde{a}(n) = \phi$:
Es gibt (U,i) mit $S_{J\mathfrak{A}}(U,i) \neq S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i)$.

Bew.: Sei $n \in U$ und $\tilde{a}(n) = \phi$, Rwie oben, sonst beliebige Relation
$P \in \mathbb{P}$, $i(P) = \phi$, $i'(P) = \{n\}$, (U,i), (U,i') sonst bel. Interpretationen
$> S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\{\forall x\{Px\}\}) = f$ und $S_{J\mathfrak{A}}(U,i')(\{\forall x\{Px\}\}) = w$
1. Fall: $(\phi,\phi) \in R > S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i)(\{\forall x\{Px\}\}) = S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i')(\{\forall x\{Px\}\}) = w$
2. Fall: $(\phi,\phi) \notin R > S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i)(\{\forall x\{Px\}\}) = S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i')(\{\forall x\{Px\}\}) = f$
also $S_{J\mathfrak{A}}(U,i) \neq S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i)$ oder $S_{J\mathfrak{A}}(U,i') \neq S_{J\mathfrak{A}_R}(U,i')$ $R \not\subseteq$

Folgerung: $\exists$ n mit n leerer Name $> S_{J\mathfrak{A}}$ nicht pVE zielextensional
für $p \in \{s, s_1, n_1, n_2\}$
aber $S_{J\mathfrak{A}} \in$ EE zielextensional.
und nicht $S_{J\mathfrak{A}_2}$ RVE zielextensional (für $S_{J\mathfrak{A}_R}$ entsprechend $S_{J\mathfrak{A}_R}$ definiert).

Bew.: $\forall R$ R wie oben, gilt $\exists n : \tilde{a}(n) = \phi > \exists n, M (n \in N \supseteq M, n \notin M$ oder $\tilde{a}_{\mathfrak{A}_R} \cap \notin R)$
$i(a) := n \quad \forall a \in J_U V \quad i(P) := M \ \forall P \in \mathbb{P} \quad U := M \cup \{n\}$
$(\tilde{a}(n), \tilde{a}(M)) \in R_1 : \not\exists \ \tilde{a}(n) \subseteq \tilde{a}(M)$ [und $\tilde{a}(n) = \phi$]
$(\tilde{a}(n), \tilde{a}(M)) \in R_2 : \not\exists \ \tilde{a}(n) \cap \tilde{a}(M) \neq \phi$ [oder $\tilde{a}(n) = \phi$]
$> S_{J \subseteq_{[4]}}(U,i)(\{Pa\}) = S_{J\mathfrak{A}_{R_1}}(U,i)(\{Pa\}) \neq S_{J\mathfrak{A}}(U,i)(\{Pa\}) \neq S_{J\mathfrak{A}_{R_2}}(U,i)(\{Pa\})$

2.3. Vollständigkeit und Zuverlässigkeit nichtklassischer Interpretationssemantiken

Ich habe gezeigt, daß die nichtklassischen Semantiken intuitiv und im Sinne derZielextensionalität adäquat sind für Interpretationenen mithilfe von Namen (des klassischen Kalküls 1. Stufe)

Jetzt bleibt zu zeigen, für welche Namen diese Semantiken nur und genau die klassisch ableitbaren Formeln charakterisieren. Für welche Namen sind die nichtklassichen Semantiken zuverlässig und vollständig?

Satz 1: Der klassische Kalkül 1. Stufe ist $\mathfrak{S}_{Jp}$ zuverlässig für alle $p \in \{\varepsilon, \leq_1, \leq_2, \cap_1, \cap_2\}$

Bew: sei p wie oben

wenn $\mathfrak{S}_{Jp} \leq \mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}}$ dann gilt, wegen Ω ableitbar $\Rightarrow \Omega\ \mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}}$-allgemeingültig, auch Ω $\mathfrak{S}_{Jp}$-allgemeingültig,
also bleibt nur zu zeigen $\mathfrak{S}_{Jp} \leq \mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}}$ für alle p.
Sei $\mathfrak{U} = (\sigma, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ $\sigma = ((\exists, \mathbb{P}, \forall, (\neg, \vee, \to, \vee, \leq, \neq), \cap, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$

a) $\mathfrak{S}_{J\in} \overset{!}{\leq} \mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}}$

zu $S \in \mathfrak{S}_{J\in}$ $\mathfrak{F}(U,i)$ mit (U,i) Interpret. mithilfe von Namen für σ
mit $S = S_{J\in}(U,i)$
$U' := \{\bar{\alpha}(n) : n \in U\}$
$i'(a) := \bar{\alpha} \circ i(a)$ $\forall a \in \mathfrak{U} \cup \mathbb{V}$
$i'(P) := [\bar{\alpha}(n) : n \in i(P)$ $\forall P \in \mathbb{P}$
$\Rightarrow S_{J\mathfrak{L}}(U',i') \overset{!}{=} S_{J\in}(U,i)$
Induktion: $S_{J\in}(U,i)(\in Pat) = w \Leftrightarrow \underbrace{\bar{\alpha} \circ i(a)}_{i'(a)} \in \underbrace{\{\bar{\alpha}(n) : n \in i(P)\}}_{i'(P)}$
$\Leftrightarrow S_{J\mathfrak{L}}(U',i')(\in Pat) = w$

Behauptung gezeigt für alle (U,i) und $\Omega \in \mathbb{F}o$
$S_{J\in}(U,i)(\in \forall x \Omega) = w \Leftrightarrow \exists n \in U$ mit $S_{J\in}(U, i\binom{n}{x})(\Omega) = w$
$\overset{I.V}{\Leftrightarrow} \exists n \in U'$ mit $S_{J\mathfrak{L}}(U', (i\binom{n}{x})')(\Omega) = w = S_{J\mathfrak{L}}(U', i'\binom{\bar{\alpha}(n)}{x})(\Omega)$
da $(i\binom{n}{x})'(a) = \begin{cases} \bar{\alpha}(n) \text{ für } a = n \\ \bar{\alpha} \circ i(a) \text{ für } a \neq n \end{cases} = i'\binom{\bar{\alpha}(n)}{x}(a)$

gdw $\exists\, m \in U'$ mit $S_{J\mathfrak{L}}(U', i', \overset{n'}{x})(\Omega) = w$

Rest trivial

b) $\mathfrak{S}_{J\leq 1[2]} \overset{!}{\subseteq} \mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}}$ Sei $S = S_{J\leq 1[2]}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\leq 1[2]}$ [1]

$U'' := \{\tilde{\alpha}(n) : n \in U\}$

$i''(a) := \tilde{\alpha} \circ i(a) \quad \forall\, a \in \mathcal{J}\cup\mathcal{V}$

$i''(P) := \{\tilde{\alpha}(n) : \tilde{\alpha}(n) \subseteq \bigcup_{n\in i(P)} \tilde{\alpha}(n)\} \cap U' \,[\neq \{\phi\}]$

$\Rightarrow S_{J\mathfrak{L}}(U'', i'') \overset{!}{=} S_{J\leq 1[2]}(U,i)$

Ind.: $P \in \mathcal{P} \quad a \in \mathcal{J}\cup\mathcal{V}$

$S_{J\leq 1[2]}(U,i)(\mathfrak{f}Pa\mathfrak{t}) = w \;\Leftrightarrow\; \tilde{\alpha}\circ i(a) = i''(a) \in \{\tilde{\alpha}(n) : \tilde{\alpha}(n) \subseteq \bigcup_{n\in i(P)} \tilde{\alpha}(n)\}\,[\neq\{\phi\}]$

$\Leftrightarrow\; \tilde{\alpha}\circ i(a) \subseteq \bigcup_{n\in i(P)} \tilde{\alpha}(n)$ [und $\tilde{\alpha}\circ i(a) \neq \phi$]

Sei Behauptung gezeigt für alle (U,i), (U'', i'') und Ω

$S_{J\mathfrak{L}}(U'', i'')(\mathfrak{f}\forall x \Omega\mathfrak{t}) = w \;\Leftrightarrow\; \exists n' \in U''$ mit $S_{J\mathfrak{L}}(U'', i''\overset{n'}{x})(\Omega) = w$

$\Leftrightarrow\; \exists\, n \in U$ mit $\tilde{\alpha}(n) = n'$ mit $S_{J\mathfrak{L}}(U'', (i\overset{n}{x})'')(\Omega) = w$

$\Leftrightarrow\; \exists\, n \in U$ mit $S_{J\mathfrak{C}}(U, i\overset{n}{x})(\Omega) = w$

c) $S_{J\cap 1[2]} \overset{!}{\subseteq} \mathfrak{S}_{J\mathfrak{L}}$.

$S = S_{J\cap 1[2]}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\cap 1[2]}$

$U' := \{\tilde{\alpha}(n) : n \in U\}$

$i'(a) := \tilde{\alpha}\circ i(a) \quad \forall a \in \mathcal{J}\cup\mathcal{V}$

$i'(P) := \{\tilde{\alpha}(n) : \tilde{\alpha}(n) \cap \bigcup_{n\in i(P)} \tilde{\alpha}(n)\} \cap U' \,[\cup(\{\phi\}\cap U')]$

$\Rightarrow S_{J\mathfrak{L}}(U', i') \overset{!}{=} S_{J\cap 1[2]}(U,i)$

$S_{J\mathfrak{L}}(U', i')(\mathfrak{f}Pa\mathfrak{t}) = w \;\Leftrightarrow\; \tilde{\alpha}\circ i(a) \in \{\tilde{\alpha}(n) : \tilde{\alpha}(n) \cap \bigcup_{n\in i(P)} \tilde{\alpha}(n) \neq \phi\} \cap U'$

$\Leftrightarrow\; \tilde{\alpha}\circ i(a) \cap \bigcup_{n\in i(P)} \tilde{\alpha}(n) \neq \phi$ [oder $\tilde{\alpha}\circ i(a) = \phi$] [oder $\tilde{\alpha}\circ i(a) = \phi$]

$\Leftrightarrow\; S_{J\cap 1[2]}(U,i)(\mathfrak{f}Pa\mathfrak{t}) = w$

Rest trivial

---

1) die eckigen Klammern beziehen sich auf den Beweis für $\mathfrak{S}_{J\leq 2}$ bzw $\mathfrak{S}_{J\cap 2}$.

Also sind die klassisch ableitbaren Formeln auch allgemeingültig bzgl. der zielextensionalen Semantiken.
Der klassische Ableitungsbegriff ist also höchstens zu streng, also kann insbesondere die Existenzgeneralisierungs-Einschränkung (!!) der free Logic generell in Frage gestellt werden (im Zusammenhang mit leeren und mehrdeutigen Namen in Interpretationen).
Höchstens können noch weniger Aussagen ableitbar als ($S_{J\epsilon}$, $S_{J\subseteq_1}$, $S_{J\cap_1}$) allgemeingültig sein.

Für welche Namen ist nun der klassische Kalkül vollständig?

Satz 2: für $\mathcal{H} = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V}, \dots), \sigma, IFo, IAu), IAx, IAb)$ Kalkül 1. Stufe

a) $\exists R \subseteq N$ mit $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$ >
und R ohne extensionsgleiche Namen > $\mathcal{H}$ $S_{J\epsilon}$- vollständig

b) $\exists R \subseteq N$ mit $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$
und R mit Extensionenrepräsentatensystem > $\mathcal{H}$ $S_{J\subseteq_1}$-vollständig

c) $\exists R \subseteq N$ mit $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$
und R nur mit extensionsdisjunkten nichtleeren Namen
> $\mathcal{H}$ $S_{J\cap_1}$ - vollständig

Bew: Unter den jeweiligen Voraussetzungen für R in a), b), c)
gilt nach Kap 2.2. Satz 4
$\forall (R,i)$ mit (R,i) Interpretation für σ ($\sigma = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V} \dots)$
$S_{J\epsilon}(R,i) = S_{J\mathfrak{A}}(R,i)$, $S_{J\subseteq_1}(R,i) = S_{J\subseteq_2}(U,i) = S_{J\mathfrak{A}}(R,i)$,
$S_{J\cap_1}(R,1) = S_{J\cap_2}(R,i) = S_{J\mathfrak{A}}(R,i)$

somit: $S_{J\mathfrak{A}}(\{(R,i) : (R,i)$ Interpretation für $\sigma\} \leq S_{J\epsilon}$ für R aus a)

$S_{J\mathfrak{A}}(\{(R,i) : (R,i)$ Interpretation für $\sigma\} \leq S_{J\subseteq_1}$ für R aus b)

wenn $S_{J\mathfrak{A}} = S_{J\mathfrak{A}}(\{(U,i) : (U,i)$ Interpretation für $\sigma\})$

Mithin bleibt nur noch zu zeigen: $S_B \stackrel{!}{\leq} S_{J\mathfrak{A}}(\{(R,i) : (R,i)$ Int. für $\sigma\})$ für R aus a,b,c.
Sei $S \in S_B(b_0) \in S_B$ $S_B = S_a(\{b_0 : b_0 : \{$Atomformeln in $\sigma\} \to \{w, f\}\})$
nach Vor. $\exists\, l : \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V} \to R$ eindeutige Abb. (in allen Fällen a)b)c))
erweitere l zu l' mit
$l'(a) := l(a)$ $\forall a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$
$l'(P) := \{l(a) : b_0(Pat) = w\}$ also (R, l') Interpretation für σ

---

1) $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$ für Es gibt eine eindeutige Abb. $l : R \to \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$

Beh.: $S_{J\ell}(R,\ell') \doteq S_B(b_0)$

Induktion: Sei $P \in \mathbb{P}$, $a \in \mathfrak{J} \cup \mathbb{V}$

$$S_{J\ell}(R,\ell')(\langle Pa\rangle) = w \Leftrightarrow \ell'(a) \in \ell'(P) = \{\ell(a) : b_0(\langle Pa\rangle) = w\}$$
$$\Leftrightarrow \exists a' \text{ mit } \ell'(a) = \ell(a') \text{ und } b_0(\langle Pa'\rangle) = w$$
$$\Leftrightarrow b_0(\langle Pa\rangle) = w$$
$$\underset{\ell \text{ eineind.}}{\Leftrightarrow} S_B(b_0)(\langle Pa\rangle) = w$$

Beh. gezeigt für alle $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$

$$S_{J\ell}(R,\ell')(\langle \forall x\,\Omega\rangle) = w \Leftrightarrow \exists n\; n \in R \text{ und } S_{J\ell}(R,\ell'^{\,n}_{\,x})(\Omega) = w$$
$$\Leftrightarrow \exists n\; n \in R \text{ und } S_{J\ell}(R,\ell')(\Omega^{\ell'^{-1}(n)}_{x}) = w$$
$$\underset{\ell' \text{ eind.}}{\Leftrightarrow} \exists a \in (\mathfrak{J} \cup \mathbb{V}) = (\ell'^{-1}(R)) \text{ und } S_B(b_0)(\Omega^{a}_{x}) = w$$
$$\underset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} S_B(b_0)(\langle \forall x\,\Omega\rangle) = w$$

$$S_{J\ell}(R,\ell')(\langle \neg\Omega\rangle) = w \Leftrightarrow S_{J\ell}(R,\ell')(\Omega) = f = S_B(b_0)(\Omega)$$

$$S_{J\ell}(R,\ell')(\langle \Omega_1 \vee \Omega_2\rangle) = w \Leftrightarrow S_{J\ell}(R,\ell')(\Omega_1) = w = S_B(b_0)(\Omega_1)$$
$$\text{oder } S_{J\ell}(R,\ell')(\Omega_2) = w = S_B(b_0)(\Omega_2)$$

$$S_{J\ell}(R,\ell')(\langle \Omega_1 \rightarrow \Omega_2\rangle) = w \Leftrightarrow S_{J\ell}(R,\ell')(\Omega_1) = f = S_B(b_0)(\Omega_1)$$
$$\text{oder } S_{J\ell}(R,\ell')(\Omega_2) = w = S_B(b_0(\Omega_2)$$

q.e.d.

Fazit:

a) Wenn es mindestens soviele extensionsverschiedene Namen wie Individuenzeichen in $\mathfrak{H}$ gibt,
ist $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{S}_{J6}$-zuverlässig und-vollständig,
ist Ω klassisch ableitbare Formel gdw Ω $\mathfrak{S}_{J6}$ allgemeingültig

b) Wenn es mindestens soviele Namen mit Extensionenrepräsentantensystem, d.h. Namen die jeder eines ihrer Denotate mit keinem anderen Namen teilen, gibt, wie Individuenzeichen in $\mathfrak{H}$ ist
$\mathfrak{H}$ $\mathfrak{S}_{J\delta 1}$-, $\mathfrak{S}_{J\delta 2}$-zuverlässig und-vollständig,
ist Ω klassisch ableitbare Formel gdw Ω $\mathfrak{S}_{J\delta_1}$-allgemeingültig.

c) Wenn es mindestens soviele Namen, die extensionsdisjunkt und nicht leer sind, wie Individuenzeichen in $\mathfrak{H}$ gibt, ist $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{S}_{J\eta_2}$-zuverlässig und-vollständig.

Also ausschlaggebend für die vollständige Charakterisierung der

$\mathcal{K}$-ableitbaren Formeln ist, daß es genügend Namen einer <u>gewissen</u> <u>Sorte</u> gibt, nicht, daß leere, mehrdeutige etc. Namen ausgeschlossen sind!

Satz 3: $s = (\mathcal{J}, \mathbb{P}, \mathcal{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \bigvee, \{, \}), \cap, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u) \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ Sprache 1. Stufe $\mathfrak{S}_{J\epsilon_i}$ $s\{s : s\mathbb{F}o \ldots\}$

a) $\forall R \quad \mathcal{J} \cup \mathcal{V} \cong R > R \notin \{\tilde{\Delta}(n) : n \in N\}$ und $\exists R'$ mit $\mathcal{J} \cup \mathcal{V} \cong R' \subseteq \mathbb{P}$
dann gilt $\mathfrak{S}_{J\epsilon} \neq \mathfrak{S}_B$

b) $\forall R$ mit $\mathbb{P} \cong R > R \notin \mathfrak{P}(\{\tilde{\Delta}(n) : n \in N\})$ dann $\mathfrak{S}_{J\epsilon} \neq \mathfrak{S}_{J\xi}$

c) $\forall R$ mit $\mathbb{P} \cong R > R \notin \{\bigcup_{n \in M} \tilde{\Delta}(n) : M \subseteq N\}$ dann $\mathfrak{S}_{J s_{1}} \neq \mathfrak{S}_B$

d) $\forall R$ mit $\mathbb{P} \cong R > R \notin \{\bigcup_{n \in M} \tilde{\Delta}(n) : \dot{M} \subseteq N\}$ dann $\mathfrak{S}_{J n_{1}} \neq \mathfrak{S}_B$

Bew.:

a) Sei $r : \mathcal{J} \cup \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{P}$ Injektion ($\exists$ wegen $\mathcal{J} \cup \mathcal{V} \cong R \subseteq \mathbb{P}$)
$b_0(\{Pa\}) = w : \Leftrightarrow P = r(a) \quad > S_B(b_0) \in \mathfrak{S}_B$

Sei $S = S_{J\epsilon}(U, i) \in \mathfrak{S}_{J\epsilon}$
$> i : \mathcal{J} \cup \mathcal{V} \rightarrow U \subseteq N \qquad \tilde{\Delta} \circ i : \mathcal{J} \cup \mathcal{V} \rightarrow \{\tilde{\Delta}(n) : n \in N\}$
$\underset{\text{Vor.}}{>} \exists\, a, b \in \mathcal{J} \cup \mathcal{V}$ mit $a \neq b$ und $\tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta} \circ i(b)$
$> S_{J\epsilon}(U,i)(\{Pa\}) = S_{J\epsilon}(U,i)(\{Pb\})$ für $P = r(a) \neq r(b)$
aber $S_B(b_0)(\{Pa\}) = w \neq f = S_B(b_0)(\{Pb\})$ für $P = r(a)$

also $S_{J\epsilon}(U,i) \neq S_B(b_0)$

b) Sei $U_0 := \mathbb{P} \qquad P_1 \in \mathbb{P}$ ($\neq \emptyset$ nach Vor.)
$i_0(a) := P_1 \quad \forall a \in \mathcal{J} \cup \mathcal{V}$
$i_0(P) := \{P\} \; \forall P \in \mathbb{P} \qquad > S_{J\xi}(U_0, i_0) \in \mathfrak{S}_{J\xi}$

Sei $S = S_{J\epsilon}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\epsilon}$
$> \exists\, \ell : \mathbb{P} \rightarrow \{\tilde{\Delta}(n) : n \in N\}$ mit $\ell(P) := \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$
$\underset{\text{Vor.}}{>} \exists\, P, Q \in \mathbb{P}$ mit $P \neq Q$ und $\ell(P) = \ell(Q)$
$> S_{J\epsilon}(U,i)(\{\neg\{\bigvee x\{\neg\{\{P_1 x\} \rightarrow \{P_2 x\}\} \vee \{\neg\{\{P_2 x\} \rightarrow \{P_1 x\}\}\}\}\}\}) = w$ 1)
$S_{J\xi}(U_0, i_0)($ $-\|-$ $) = f$
also $S_{J\epsilon}(U,i) \neq S_{J\xi}(U_0, i_0)$

---

1) bei anderem Alphabet: $S_{J\xi}(U,i)(\{\bigwedge x\{\{P_1 x\} \rightleftarrows \{P_2 x\}\}\})$
bzw: $S_{J\epsilon}(U,i)(\{\bigwedge x\{\{P_1 x\} \rightleftarrows \{P_2 x\}\}\})$

c) (U_0, i_0) wie oben

Sei $S = S_{J\mathfrak{S}1}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\mathfrak{S}1}$

$\succ \exists \ell : \mathbb{P} \to \{ \bigcup_{n\in M} \bar{a}(n) : M \subseteq N \}$ $\quad \ell(P) := \bigcup_{n\in i(P)} \bar{a}(n)$

$\underset{\text{vor.}}{\succ}$ $\exists P, Q \in \mathbb{P}$ mit $\ell(P) = \ell(Q)$

$\succ S_{J\mathfrak{S}1}(U,i)(\{\neg\{\forall x\{\{Px\}\to\{Qx\}\}\}\vee\{\neg\{\{Px\}\to\{Qx\}\}\}\}) = w$

also $S_{J\mathfrak{S}2}(U_0,i_0) \neq S_{J\mathfrak{S}}(U,i)$

Satz 4: wenn $\{\bar{a}(n) : n \in N\}$ endlich und

$\exists R' : \exists U \vee \subseteq R' \subseteq \mathbb{P}$ und $\forall R\ \exists U \vee \cong R > R \notin \{\bar{a}(n) : n \in N\}$

$\succ \exists \Omega$ Ω $S_{J\mathfrak{S}}$-allgemeingültig und Ω nicht $\mathfrak{U}$-ableitbar

Bew:

Sei $\{\bar{a}(n) : n \in N\} = \{\bar{a}(n_1), \dots \bar{a}(n_r)\}$ Abzählung

Sei $\exists U \vee = \{a_1, \dots, a_m, \dots\}$ Abzählung (endlich o. unendlich)

$\underset{\text{vor.}}{\succ}$ $\{a_1, \dots, a_{r+m}\} \subseteq \exists U \vee$ und $\exists P_i \in \mathbb{P}$ mit $\{P_1, \dots, P_{r+1}\} \subseteq \mathbb{P}$
mit $1 \le i,j \le r+1$ und $P_i \neq P_j$ für $i \neq j$

$\Omega := \{\dots\{\dots\{\dots\{\pi P_1 a_1\}\}\vee\dots\dots \vee\{\neg\{P_{r+1} a_{r+1}\}\}\}$
$\vee\{P_1 a_1\}\}\vee\dots\dots\vee\{P_{r+1} a_r\}\}$

Sei $S = S_{J\mathfrak{S}}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\mathfrak{S}}$ $\succ S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\Omega) = w$ $\not\succ \exists k\ S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_k\}) = f$

oder $\exists k \neq j$ mit $S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_j\}) = w$

(U,i) Interpret mithilfe von Namen $\succ i : \exists U \vee \to U \subseteq N$

$\succ \exists a_j \neq a_k$ mit $\bar{a} \circ i(a_j) = \bar{a} \circ i(a_k)$

$\succ S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_k\}) = S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_j\})$

1. Fall $S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_k\}) = f$ $\succ S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\Omega) = w$

2. Fall $S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_k\}) = w = S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\{P_k a_j\})$ und $j \neq k$
$\succ S_{J\mathfrak{S}}(U,i)(\Omega) = w$

<u>aber</u> für b_0 $(\{P_j a_k\}) = w$ $\not\succ j = k$

$\succ S_B(b_0)(\Omega) = f$ $\succ \Omega$ nicht $\mathfrak{U}$-ableitbar

Satz 5 : Sei $\mathfrak{U} = (\Sigma, Ax, Ab)$ und $\sigma = ((\exists_1, \dots), \neg, (Fo, \forall U), \dots)$, wie oben.
und $\{\bar{a}(n) : n \in N\}$ ENDLICH ! und

a) $\forall R\ (\mathbb{P} \cong R > R \notin \mathfrak{P}(\{\bar{a}(n) : n \in N\}))$

$\succ \exists \Omega$ mit Ω $S_{J\mathfrak{S}}$-allgemeingültig und
Ω nicht $\mathfrak{U}$-ableitbar

b) $\forall R\,(\mathbb{P} \cong R > R \notin \{\bigcup_{n\in M} \tilde{\alpha}(n) : M \subseteq N\})$

$> \exists \Omega \in Au$ mit Ω $S_{J\leq 1}$-allgemeingültig und nicht $\mathcal{U}$-ableitbar

c) $\forall R\,(\mathbb{P} \cong R > R \subseteq \{\bigcup_{n\in M} \tilde{\alpha}(n) : M \subseteq N\})$

$> \exists \Omega \in Au$ mit Ω $S_{J=1}$-allgemeingültig und nicht $\mathcal{U}$-ableitbar

Bew:

Sei $\{\tilde{\alpha}(n) : n \in N\} = \{\tilde{\alpha}(n_1), \ldots \tilde{\alpha}(n_k)\}$ Abzählung

$> \exists k$: $\mathcal{P}(\{\tilde{\alpha}(n) : n \in M\}) = \{M_1, \ldots M_k\}$

bzw $\{\bigcup_{n\in M} \tilde{\alpha}(n) : M \subseteq N\} = \{H_1, \ldots H_k\}$ (b), c))

$>$ vorauss, b) c) $\exists P_i \in \mathbb{P}$ mit $\{P_1, \ldots P_{k+1}\} \subseteq \mathbb{P}$ und $1 \leq i \leq k+1$ $P_i \neq P_j$ für $i \neq j$

$\Omega_{ij} := \{\{\neg\{Vx\{\{\neg\{\neg\{\{P_i x\}\}\} \to \{P_j x\}\}\} \vee \{\neg\{\neg\{\{P_j x\}\} \to \{P_k x\}\}\}\}\}\}$

$\Omega := \{\{\Omega_{12} \vee \Omega_{13}\} \vee \ldots \ldots \vee \Omega_{k,k+1}\}$

$U_0 := \mathbb{P}$ $\quad i_0(a) := P_1$ $\forall a \in \mathcal{U} \cup V$

$i_0(P) := \{P\}$ $\forall P \in \mathbb{P}$

$> \forall k \neq i$ $S_{J\leq}(U_0, i_0)(\Omega_{k,j}) = f$, da $i(P_k) \neq i(P_j)$ für $k \neq j$

$> S_{J\leq}(U_0, i_0)(\Omega) = f$

a) Sei $S = S_{J\in}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\in} > \exists P \neq Q$ $P,Q \in \{P_1, \ldots P_{k+1}\}$

mit $\{\tilde{\alpha}(n) : n \in i(P)\} = \{\tilde{\alpha}(n) : n \in i(Q)\}$ (wie Satz 3)

$> S_{J\in}(U,i)(\Omega_{s,j}) = w > S_{J\in}(U,i)(\Omega) = w$

b) Sei $S = S_{J\leq 1}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J\leq 1} > \exists P_s \neq P_j$ mit $\bigcup_{n\in i(P_s)} \tilde{\alpha}(n) = \bigcup_{n\in i(P_j)} \tilde{\alpha}(n)$ $1 \leq s,j \leq k+1$

$> S_{J\leq 1}(U,i)(\Omega_{sjj}) = w > S_{J\leq 1}(U,i)(\Omega) = w$

c) Sei $S = S_{J=1}(U,i) \in \mathfrak{S}_{J=1} > \exists P_s \neq P_j$ wie oben

$> S_{J=1}(U,i)(\Omega) = w$

Folgerung: unter den Voraussetzungen des Satzes ist $\mathcal{U}$ nicht $\mathfrak{S}_{J\in}$, $S_{J\leq 1}$- oder $\mathfrak{S}_{J=1}$ vollständig, der Ableitungsbegriff des klassischen Kalküls ist zu streng!

3. Semantische Festlegungen für klassischen Kalkül mit Identität.

3.1. Klassische Festlegungen

$\mathfrak{A}$ ALPHABET einer Sprache 1. Stufe mit Identität : gdw

$\exists\, \mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, \neg, \vee, \rightarrow, \forall, \iota, \dagger, \approx$ mit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall \iota, \dagger, \approx))$, so daß

1) $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall \iota, \dagger))$ Alphabet einer Sprache 1. Stufe

2) $\{\approx\}, U\mathfrak{A}$ disjunkte Mengen.

$U\mathfrak{A}$ GRUNDSYMBOLMENGE einer Sprache 1. Stufe mit Identität analog oben.

$\mathfrak{s}$ Sprache 1. Stufe mit Identität : gdw

$\exists\, \mathfrak{A}, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u, \frown$ mit $\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$ mit

1) $\mathfrak{s}_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \iota, \dagger, \subset))$ Alphabet einer Sprache 1. Stufe mit Identität

2) $\frown$ Konkatenation über $U\mathfrak{A}$

3) $\mathbb{F}o = \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ für $M \in \mathbb{M} :\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{P}, \forall a, b \in \mathfrak{I} \cup \mathbb{V}$ gilt $\langle Pa \rangle, \langle a \approx b \rangle \in M$
$\forall \Omega_1, \Omega_2 \in M, \forall x \in \mathbb{V}$ gilt
$\langle \neg \Omega_1 \rangle, \langle \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \rangle, (\Omega_1 \vee \Omega_2), \langle \forall x \Omega_1 \rangle \in M$

4) $\mathbb{A}u = \{\Omega : \Omega \in \mathbb{F}o \text{ und } fv(\Omega) = \phi\}$
für $fv : \mathfrak{I} \cup \mathbb{V} \cup \mathbb{F}o \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{V})$ Abbildung mit
$\forall a \in \mathfrak{I}\ fv(a) = \phi \quad \forall a \in \mathbb{V}\ fv(a) = \{a\} \quad \forall a, b \in \mathbb{V}\ \forall P \in \mathbb{P}\ fv(\langle Pab \rangle) = fv(a)$
$fv(\langle a \approx b \rangle) = fv(a) \cup fv(b) \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{F}o, \forall x \in \mathbb{V} \quad fv(\langle \neg \Omega_1 \rangle) = fv(\Omega_1)$
$fv(\langle \Omega_1 \wedge \Omega_2 \rangle) = fv(\Omega_1 \rightarrow \Omega_2) = fv(\Omega_1) \cup fv(\Omega_2) \quad fv(\langle \forall x \Omega_1 \rangle) = fv(\Omega_1) \setminus \{x\}$

$\mathfrak{Kl}$ KALKÜL 1. Stufe mit Identität:

$\exists\, \mathfrak{s}, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b$ mit $\mathfrak{Kl} = (\mathfrak{s}, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$

1) $\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$ Sprache 1. Stufe mit Identität

2) $\mathbb{A}x = \{\Omega : \Omega$ Axiom des klassischen Kalküls mit Identität (also Äquivalenzrelationsaxiome bzgl. $\approx$ und Substitutionsaxiom bzgl. $\approx$, etc.)

3) $\mathbb{A}b = \{(\Omega_1, \ldots \Omega_n) : (\Omega_1, \ldots \Omega_n)$ Ableitung im Kalkül 1. Stufe mit Identität

(U, i) INTERPRETATION für $\mathfrak{s}$: gdw

1) $\mathfrak{s} = ((\mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \forall, \iota, \dagger, =), \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u), \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ Sprache 1. Stufe m. Id.

2) $U \neq \phi \quad i : \mathfrak{I} \cup \mathbb{V} \cup \mathbb{P} \rightarrow U \cup \mathfrak{P}(U)$ Abb. mit $\forall a \in \mathfrak{I} \cup \mathbb{V}\ i(a) \in U; \forall P \in \mathbb{P}\ i(P) \in \mathfrak{P}(U)$

$\mathfrak{S}$ SEMANTIK für $\mathfrak{s}$: gdw

1) $\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}, \frown, \mathbb{F}o, \mathbb{A}u)$ Sprache 1. Stufe mit Identität

2) $\exists w \neq f$ mit $\mathfrak{S} \subseteq \{s : s : \mathbb{F}o \rightarrow \{w, f\}$ Abbildung$\}$

$\mathfrak{S}_{J_2}$ KLASSISCHE Interpretationssemantik für $\mathcal{S}$: gdw

1) $\mathfrak{S}_{J_2}$ Semantik für $\mathcal{S} = ((\mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \vee, \{, \}, =), \circ, /A_U, \mathbb{F}o), /A_x, /A_b)$

2) mit $\mathfrak{S}_{J_2}$ s { s : s : $\mathbb{F}o \rightarrow \{w, f\}$ Abb }

$\exists\, S_{J_2}$ mit $S_{J_2} : \{(U,i) : (U,i)$ Interpretation für $\mathcal{S}\} \rightarrow \mathfrak{S}_{J_2}$ surjektive Abb.

so daß $\forall z \in \mathfrak{I} \cup \mathbb{V}, \forall P \in \mathbb{P}$

$S_{J_2}(U,i)(\{Pa\}) = w \;\not\Leftrightarrow\; i(a) \in i(P)$

$S_{J_2}(U,i)(\{a = b\}) = w \;\not\Leftrightarrow\; i(a) = i(b)$

$\forall \Omega \in \mathbb{F}o \;\; \forall x \in \mathbb{V}$

$S_{J_2}(U,i)(\{\forall x \Omega\}) = w \;\not\Leftrightarrow\; \exists n \in U$ mit $S_{J_2}(U, i\frac{n}{x})(\Omega) = w$

etc wie üblich

$\mathfrak{S}_B$ KLASSISCHE Bewertungssemantik für $\mathcal{S}$: gdw

1) $\mathfrak{S}_B$ Semantik für $\mathcal{S} = ((\mathfrak{I}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \rightarrow, \vee, \{, \}, =), \circ, \mathbb{F}o, A_U), A_x, A_b)$

mit $\mathfrak{S}_B = \{s : s : \mathbb{F}o \rightarrow \{w, f\}$ Abbildung$\}$

2) $\exists\, S_B$ mit $S_B : \{b : b : \{a = b\}, \{Pa\} : a, b \in \mathfrak{I} \cup \mathbb{V}$ und $P \in \mathbb{P}\} \rightarrow \{w, f\}\} \rightarrow \mathfrak{S}_B$ surjektiv

so daß : $S_B(b)(\{Pa\}) = b(\{Pa\})$

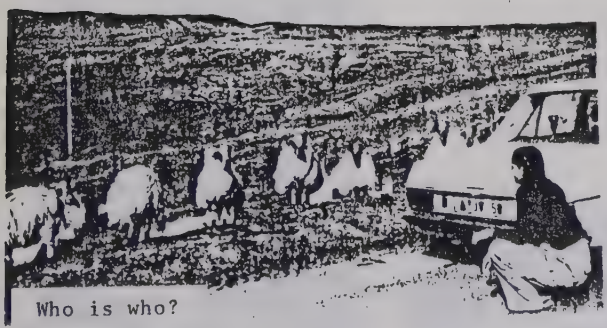
$S_B(b)(\{a = b\}) = b(\{a = b\})$

und $\forall\, \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{F}o$, $x \in \mathbb{V}$

$S_B(b)(\{\neg \Omega_1\}) = w \;\not\Leftrightarrow\; S_B(b)(\{\Omega_1\}) = f$

$S_B(b)(\{\forall x \Omega_1\}) = w \;\not\Leftrightarrow\; \exists\, a \in \mathfrak{I} \cup \mathbb{V}$ mit $S_B(b)(\Omega_1 \frac{a}{x}) = w$

etc. wie üblich



Who is who?

3.2. Interpretationen mithilfe von Namen

Sei (N, Δ) Namenmenge $\sim$ Srache 1. Stufe mit Identität

(U,i) INTERPRETATION mithilfe von Namen für $\sim$: gdw

1) (U,i) Interpretation für $\sim$

2) $U \subseteq N$

für $p \in \{A, G_1, S_2, n_1, n_2\}$ $j \in \{1, \dots G, A\}$

$\mathfrak{S}_{Jp\sim j}$ INTERPRETATIONSSEMANTIK über Namen für $\sim$: gdw

1) $\mathfrak{S}_{Jp\sim j}$ Semantik für $\sim$

2) $\exists\, S_{Jp\sim j}$ mit $S_{Jp\sim j} : \{(U,i) : (U,i)$ Interpretation über Namen für $\sim\} \to \mathfrak{S}_{Jp\sim j}$ (Abbildung)

Es bleibt alles entsprechend dem Kalkül ohne Identität auch:

α, β Zielinvarianz, $\alpha\beta$-Zielextensionalität:

für $\alpha, \beta \in \{V, E\}$

$(U,i), (U',i')$ $\alpha\beta$ ZIELINVARIANTE INTERPRETATIONEN für $\sim$: gdw

1) $(U,i), (U',i')$ Interpretation für $\sim = (\Gamma \exists, \mathbb{P}, \forall, \neg, \vee, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow, =), \circ (Fa, Au), Ax, Ab)$

2) a) U, U' α extensionsgleich

b) $i|_{\exists U \forall}$, $i'|_{\exists U \forall}$ zielinvariant

$i|_{\mathbb{P}}$, $i'|_{\mathbb{P}}$ β zielinvariant

$\mathfrak{S}_{Jp\sim j}$ $\alpha\beta$ ZIELEXTENSIONALE Interpretationssemantik für $\sim$: gdw

1) $\exists\, \mathfrak{S}_{Jp\sim j}^*$ mit $\mathfrak{S}_{Jp\sim j}^* \subseteq \mathfrak{S}_{Jp\sim j}$ und $S_{Jp\sim j}^* = S_{Jp\sim j}|_{\{(U,i) : U \subseteq N\}}$

und $\mathfrak{S}_{Jp\sim j}^* = S_{Jp\sim j}(\{(U,i) : (U,i)$ Interpretation mithilfe von Namen für $\sim\})$

2) $\forall (U,i), (U',i')$ $(U,i), (U',i')$ $\alpha\beta$ zielinvariante Interpretationen für $\sim$ $S_{Jp\sim j}(U,i) = S_{Jp\sim j}(U',i')$

$\mathfrak{S}_{Jp\sim j}$-ALLGEMEINGOLTIGKEIT und $\mathfrak{S}_{Jp\sim j}$-ZUVERLÄSSIGKEIT, sowie $\mathfrak{S}_{Jp\sim j}$-VOLLSTÄNDIGKEIT seien für Sprachen 1. Stufe mit Identität ganz entsprechend wie in Kapitel 0 für Sprachen 1. Stufe ohne Identität festgelegt.

3.3. Interpretationssemantiken

Die klassichen interpretationssemantischen Wahrheitsfestlegungen möchte ich jetzt zusammen mit intuitiven (extensionalen) Alternativen untersuchen.

Wir können eine Identitätsaussage unter einer Interpretation mithilfe von Namen als wahr betrachten, wenn die Namen mithilfe derer die Identitätsaussage interpretiert wird.

1) extensionsgleich sind, (die via-Namen zugeordnete Bilder der Ind-zeichen übereinstimmen)
2) extensionsgleich und nichtleer sind
   (wenn es mindestens ein Bild gibt und alle Bilder der Individuenzeichen übereinstimmen).
3) nicht extensionsdisjunkt sind
   (wenn es mindestens ein gemeinsames Bild gibt)
4) wenn keine ein Bild hat oder beide mindestens ein gemeinsames Bild haben.
5) wenn beide genau ein Bild gemeinsam haben.
6) wenn beide genau ein Bild und das gemeinsam haben.
7) wenn die Namen(wörter) in der Zuordnung (mithilfe derer zugeordnet wird) gleich sind.

Ansätze

Lösungen

Sei $p \in \{k, \subseteq 1, \subseteq 2, \cap 1, \cap 2\}$ $\quad j \in \{1, \dots, 6, k\}$

$S_{\mathfrak{J}p\approx j} : \{(U,i) : (U,i)$ Interpretation mithilfe von Namen für $s\} \to \mathbb{S}_{\mathfrak{J}p\approx j}$

wobei $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}p\approx j}$ Interpretationssemantik über Namen für s ist.

und $\forall s \in \mathbb{S}_{\mathfrak{J}p\approx j}$ $\quad nb(s) \subseteq \{w, f\}$

$S_{\mathfrak{J}p\approx 1}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta} \circ i(b)$

$S_{\mathfrak{J}p\approx 2}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta} \circ i(b) \neq \emptyset$

$S_{\mathfrak{J}p\approx 3}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} \circ i(a) \cap \tilde{\Delta} \circ i(b) \neq \emptyset$

$S_{\mathfrak{J}p\approx 4}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \tilde{\Delta} \circ i(a) \cap \tilde{\Delta} \circ i(b) \neq \emptyset$ oder $\tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta} \circ i(b) = \emptyset$

$S_{\mathfrak{J}p\approx 5}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \exists o \in nb(a) \;\; \tilde{\Delta} \circ i(a) \cap \tilde{\Delta} \circ i(b) = \{o\}$

$S_{\mathfrak{J}p\approx 6}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \exists o \in nb(a) \;\; \tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta} \circ i(b) = \{o\}$

$S_{\mathfrak{J}p\approx k}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; i(a) = i(b)$

$S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(⌜Pa⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; S_{\mathfrak{J}p}(U,i)(⌜Pa⌝) = w$

$S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(⌜\neg \Omega_1⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(\Omega) = f$

$S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(⌜\Omega_1 \vee \Omega_2⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(\Omega_1) = w$ oder $S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(\Omega_2) = w$

$S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(⌜\Omega_1 \to \Omega_2⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(\Omega_1) = f$ oder $S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(\Omega_2) = w$

$S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(⌜\bigvee x \Omega_1⌝) = w \;:\Leftrightarrow\; \exists n \in U$ mit $S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U, i\tfrac{n}{x})(\Omega_1) = w$

$\forall a, b \in \mathfrak{N} \cup \mathbb{V}, \; x \in \mathbb{V} \;\; \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{F}o$ für $s = (\mathfrak{N}, \mathbb{P}, \mathbb{V}, (\neg, \vee, \to, \bigvee, ⌜, ⌝, \approx), n, \mathbb{F}o, \mathbb{A}n \dots)$

Wenn es (verschiedene) extensionsgleiche Namen gibt, ist die <u>klassische Festlegung nicht extensional:</u>

Satz 1: $\exists n, m \in N$ mit $n \neq m$ und $\Delta(n) = \Delta(m)$ und $\alpha, \beta \in \{V, E\}$

$> \exists (U,i), (U',i')$ $\quad (U,i), (U',i')$ $\alpha\beta$ zielinvariant für s

und $S_{\mathfrak{J}p\approx k}(U,i) \neq S_{\mathfrak{J}p\approx k}(U',i')$.

Bew.: : $U := \{n, m\}$ $\quad$ Sei $x, y \in \mathbb{V}$ und $x \neq y$ ($\mathbb{V}$ abzählbar unendlich)

$i(x) = n, \;\; i(y) = m \;\;\; i'(x) = n = i'(y)$ $\quad$ sonst beliebig aber gleich in U

$> (U,i), (U,i')$ $\alpha\beta$ zielinvariant für s

und $S_{\mathfrak{J}p\approx k}(U,i)(⌜x \approx y⌝) = f \neq w = S_{\mathfrak{J}p\approx k}(U,i')(⌜x \approx y⌝)$

Satz 2: $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}p}$ $\alpha\beta$ zielextensional für s $>$ $\mathbb{S}_{\mathfrak{J}p\approx j}$ $\alpha\beta$ zielextensional für s

für $\alpha, \beta \in \{V, E\}$, $p \in \{\in, \subseteq 1, \subseteq 2, \cap 1, \cap 2\}$, $j \in \{1, \dots 6\}$.

Bew.: $\{(\tilde{\Delta} \circ i(a), \tilde{\Delta} \circ i(b)) : S_{\mathfrak{J}p\approx j}(U,i)(⌜a \approx b⌝) = w\} \subseteq \{\Delta(n) : n \in N\} \times \{\Delta(n) : n \in N\}$

ist Relation für alle p und j (entsprechend der Vor.)

ferner gilt für $(U,i)(U',i')$ $\alpha\beta$ zielinvariant für s

$\tilde{\Delta} \circ i(a) = \tilde{\Delta} \circ i'(a)$ $\quad \forall a \in \mathfrak{N} \cup \mathbb{V}$ und für alle $\alpha, \beta \in \{V, E\}$

$>$ Beh.

Satz 3: Nur für $j=1$ und $j=k$ sind die Äquivalenzrelationsaxiome für $\approx$ $S_{Jp\approx j}$ -allgemeingültig für $j\in\{1,\dots,6,k\}$ $p\in\{\epsilon, s1, s2, n1, n2\}$

Bew.: a) Gültigkeit für $j=1$ und $j=k$ trivial

b) $\tilde{\Delta}(n)=\phi$ $>$ $S_{Jp\approx_{3}^{2}}(U,i)(\{\neg\{\forall x\{\neg\{x\approx x\}\}\}\})=f$ für $n\in U$

$\tilde{\Delta}(n)=\{o,p\}\neq\{o\}$

$> S_{Jp\approx_{5}^{4}}(U,i)(\{\neg\{\forall x\{\neg\{x\approx x\}\}\}\})=f$ für $n\in U$

$\tilde{\Delta}(n)=\{o\}\neq\{o,p\}\neq\tilde{\Delta}(m)\neq\{p\}=\tilde{\Delta}(r)$

$>$ $\tilde{\Delta}(n)\cap\tilde{\Delta}(m)\neq\phi$ und $\tilde{\Delta}(m)\cap\Delta(r)\neq\phi$ aber $\tilde{\Delta}(n)\cap\tilde{\Delta}(r)=\phi$ also ist das Transitivitätsaxiom nicht $S_{Jp\approx 4}$-allgemeingültig

Folgerung: $\mathfrak{N}$ ist nicht $S_{Jp\approx j}$ zuverlässig für $j\in\{2,\dots,6\}$

Bemerkung: Wenn N nur eindeutige, nichtleere Namen enthält kollabieren alle Varianten zu einer:

$S_{Jp\approx j}(U,i) = S_{Jp\approx e}(U,i)$ $\forall e,j\in\{1,\dots 6,k\}$

Satz 4: $\mathfrak{N}$ ist $S_{Jp\approx 1}$-zuverlässig für $p\in\{\epsilon, s1, s2, n1, n2\}$.

Bew.: $\mathfrak{N}=(\mathfrak{N},\mathbb{P},\mathbb{V},(\dots,\approx),\dots)$ gilt:

$\forall$ a,b$\in\mathfrak{N}\cup\mathbb{V}$ $S_{Jp\approx 1}(U,i)$ $(\{a\approx b\})=w \Leftrightarrow \tilde{\Delta}\circ i(a)=\tilde{\Delta}\circ i(b)$

Wähle nun (U',i'), für $p\in\{\epsilon, s1, s2, n1, n2\}$

entsprechend dem Beweis von 2.3 Satz 1

dannergibt sich $S_{Jp\approx 1}(U,i)$ $(\{a\approx b\}) = S_{Jk\approx k}(U',i')$ $(\{a\approx b\})$ $\forall$a,b$\in\mathfrak{N}\cup\mathbb{V}$

also $S_{Jp\approx 1}(U,i) = S_{Jk\approx k}(U',i')$ d.h. $S_{Jp\approx 1}\subseteq S_{Jk\approx k}$

Bem.: Die Transitivitätseigenschaft der Identität istunter $S_{Jp\approx_{5}^{3}}$ verletzt.

Bew.: Beispiel aus Satz 3, Beweis.

Satz 5: Für $\mathcal{K} = ((\mathfrak{I}, \mathfrak{P}, \mathfrak{V}, \ldots)\ldots)$ Kalkül 1. Stufe mit Identität gilt:

a) $\exists$ R mit $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$ und $R \subseteq N$ und
R ohne extensionsgleiche Namen $\rightarrow$ $\mathcal{K}$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}\ldots}$-vollständig

b) $\exists$ R mit $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$ und $R \subseteq N$ und
R mit Extensionenrepräsentantensystem
$\rightarrow$ $\mathcal{K}$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}\ldots}$-vollständig

c) $\exists$ R mit $R \cong \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$ und $R \subseteq N$ und
R nur mit extensionsdisjunkten nichtleeren Namen
$\rightarrow$ $\mathcal{K}$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}\ldots}$-vollständig

Bew.: z.z. $\mathcal{K} = (\sim, \mathbb{A}x, \mathbb{A}b)$ gilt $S_{\mathfrak{I}\ldots}(U,i)(\mathfrak{L}) = w$
$\forall$ (U,i) Interpretation für $\sim$ und R gemäß a), b) bzw. c),
dann $S_{\mathfrak{I}\ldots}(U,i)(\mathfrak{L}) = w$
$\forall$ (U,i) Interpretation über Namen für $\sim$ und $p \in \{\epsilon, \varsigma_1, \varsigma_2, \sigma_1, \sigma_2\}$

A. Sei (U,i) Interpretation für $\sim$
$b(\{a \sim b\}) = w :\Leftrightarrow i(a) = i(b) \quad \forall\, a,b \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}$
$b(\{Pa\}) = w :\Leftrightarrow i(a) \in i(P) \; \forall a \in \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V}, \forall P \in \mathfrak{P}$

$\rightarrow$ $S_{\mathfrak{I}\ldots}(U,i) = S_{\mathfrak{B}}(b)$ für $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}} = \{S_{\mathfrak{B}}(b) : nb(S_{\mathfrak{B}}) = \{w,f\}\}$
klassische Bewertungssemantik für $\sim$
$\rightarrow$ ($\mathcal{K}$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}\ldots}$-widersp.) $S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{L}) = w$ $\forall \mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L}$ $\mathcal{K}$-ableitbar
$\rightarrow$ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}\ldots} \subseteq \{S_{\mathfrak{B}}(b) : S_{\mathfrak{B}}(b)$ erfüllt die Identitätsaxiome von $\mathcal{K}$ (Reflexivitäts-, Symmetrie-, Transitivitäts- und Substitutionsaxiom)$\}$

b $\mathcal{K}$-ADÄQUATE Atombewertung für $\sim$:$\Leftrightarrow$ $S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{L}) = w$ für $\mathfrak{L}$ ableitbar im klassischen Kalkül mit Identität.

B. Unter den Voraussetzungen von a), b), c) gilt für entsprechendes $p \in \{\epsilon, \varsigma_1, \varsigma_2, \sigma_1, \sigma_2\}$:
$\{S_{\mathfrak{B}}(b) : b$ $\mathcal{K}$-adäquate Atombewertung für $\sim\} \overset{!}{=} \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}p\sim}$

Sei $l: \mathfrak{I} \cup \mathfrak{V} \rightarrow R$ bijektive Abbildung
$\mathfrak{I} \cup \mathfrak{V} = \{a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$ mit $a_j \neq a_s$ für $j \neq j$, gemäß Def. abzählb.
Sei $S_{\mathfrak{B}}(b) \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ beliebig
$i(a) := l(a_j)$ mit 1. $a_j \in \{a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$
2. $b(\{a \sim a_j\}) = w$
3. $\forall m \; b(\{a_j \sim a_m\}) = w \rightarrow j \leq m$
$i(P) := \{l(a) : b(\{Pa\}) = w\}$

somit: $S_{\mathfrak{B}}(b) \overset{!}{=} S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)$

Induktion: Sei $a,c \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{V}$, $P \in \mathfrak{P}$

$S_{\mathfrak{B}}(b)(\{a \simeq c\}) = w \Leftrightarrow b(\{a \simeq c\}) = w$

$\Rightarrow \exists k,k' : i(a) = 1(a_k)$ und $i(c) = 1(a_{k'})$ und

$b(\{a \simeq a_k\}) = b(\{c \simeq a_{k'}\}) = b(\{a \simeq c\}) = w$

$\Rightarrow$ (b adäquat) $b(\{a_k \simeq a_{k'}\}) = w \Rightarrow k = k'$ und $i(a) = i(c)$

$\Rightarrow S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)(\{a \simeq c\}) = w$

$\Rightarrow \bar{\Delta} \circ i(a) = \bar{\Delta} \circ i(c) \Rightarrow$ (Rohne exgleiche Namen) $i(a) = i(c)$

$\Rightarrow \exists k,k'$ mit $i(a) = 1(a_k)$ und $i(c) = 1(a_{k'})$ (1 bij.) $a_k = a_{k'}$

$\Rightarrow$ (b adäquat) $b(\{a \simeq c\}) = w \Rightarrow S_{\mathfrak{B}}(b)(\{a \simeq c\}) = w$

$S_{\mathfrak{B}}(b)(\{Pa\}) = w \Rightarrow b(\{Pa\}) = w \Rightarrow \exists k : i(a) = 1(a_k)$

und $b(\{a \simeq a_k\}) = w = b(\{Pa\}) \Rightarrow$ (b adäquat) $b(\{Pa_k\}) = w$

$\Rightarrow i(a) = i(a_k) \in i(P) \Rightarrow S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)(\{Pa\}) = w$

$\Rightarrow$ (R ohne exgleiche Namen) $i(a) \in i(P) \Rightarrow \exists k : 1(a_k) = i(a) \in$

$\in \{1(c) : b(\{Pc\}) = w\}$

$\Rightarrow b(\{Pa\}) = w \Rightarrow S_{\mathfrak{B}}(b)(\{Pa\}) = w$

Sei die Behauptung gezeigt für $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}_0$, $b, (R,i)$

Sei $x \in \mathfrak{V}$

$S_{\mathfrak{B}}(b)(\{\forall x \mathfrak{A}\}) = w \Leftrightarrow \exists a \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{V}$ mit $S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{A}^a_x) = w$

$\Leftrightarrow$ (b adäquat) $\exists a_k \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{V}$ mit $b(\{a_k \subset a\}) = w$ und $i(a) = 1(a_k)$

und $S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{A}^a_x) = S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{A}^{a_k}_x)$

$\Leftrightarrow \exists n \in R$ mit $n = i(a) = 1(a_k)$ $S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{A}^{a_k}_x) \underset{\text{I.V.}}{=} S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)(\mathfrak{A}^{a_k}_x)$

$= S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R, i^{i(a_k)}_x)(\mathfrak{A}) = S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R, i^{n}_x)(\mathfrak{A}) = w$

$\Leftrightarrow S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)(\{\forall x \mathfrak{A}\}) = w$

$S_{\mathfrak{B}}(b)(\{\neg \mathfrak{A}\}) = w \Leftrightarrow S_{\mathfrak{B}}(b)(\mathfrak{A}) = f \underset{\text{I.V.}}{=} S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)(\mathfrak{A})$

$\Leftrightarrow S_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}(R,i)(\{\neg \mathfrak{A}\}) = w$

etc.

Fazit:

1. Es gibt also auch zielextensionale Interpretatiossemantiken für den klassischen Kalkül 1. Stufe mit Identität, die ihn zuverlässig und vollständig machen ohne leere oder mehrdeutige Namen ausschließen zu müssen ($\mathfrak{S}_{\mathfrak{Jp}\simeq 1}$). Es muß nur genügend Namen einer gewissen Sorte geben (Satz 5).

2. Die klassischen Wahrheitsfestlegungen für Identitätsaussagen erhalten die Eigenschaft der Zielextensionalität nicht. Nur unter Ausschluß von extensionsgleichen Namen, also kann-wie bei der klassischen Semantik für den Kalkül ohne Identität- wohl kaum von der extensionalen Verwendung von Namen für die klassische Wahrheitsfestlegung von Identitätsaussagen die Rede sein (Der Ausschluß von extensionsgleichen Namen bedeutet den Ausschluß von extensionsgleich ersetzten, verschiedenen Interpretationen und nur sie können Kriterium für die extensionale Verwendung sein).
3. Die klassischen Identitätsaxiome sind nur für Identität im Sinne von Extensionsgleichheit alle allgemeingültig. Für die Allgemeingültigkeit aller Axiome und Ableitungsregeln ist auch bei extensionaler Deutung nicht die Existenz eines Gegenstandes Voraussetzung ($\tilde{\Delta}(N) = \emptyset$ stört nicht).Also im klassischen Kalkül mit Identität ist eine Liberalisierung der Totalreflexivität zur Existenzvoraussetzungsbefreiung nicht notwendig.

Was geschieht jedoch wenn wir das Totalreflexivitätsaxiom liberalisieren?

$\mathcal{H}_L$ LIBERALISIERTER KLASSISCHER KALKÜL MIT IDENTITÄT: gdw
$\mathcal{H}_L$ entsteht aus $\mathcal{H}$ durch die Ersetzung der Totalreflexivität durch die Formeln $\{\{\forall x\{x \approx a\}\} \rightarrow \{a \approx a\}\}$ mit $a \in \exists \cup \forall$

Satz 6 : 1. $\mathcal{H}_L$ ist $\mathfrak{S}_{\exists\approx_2}$ - und $\mathfrak{S}_{\exists\approx_4}$-zuverlässig
2. $\{\{\forall x\{x \approx a\}\} \rightarrow \{a \approx a\}\}$ ist nur nicht $\mathfrak{S}_{\exists\approx_5}$-allgemeingültig.

Bew.: $\mathfrak{S}_{\exists\approx_2}(U,i)(\{\forall x\{x \approx a\}\}) = w \Leftrightarrow \exists n \in U \subseteq N$ mit $\tilde{\Delta}(n) = \tilde{\Delta} \cdot i(a) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \tilde{\Delta} \cdot i(a) = \tilde{\Delta} \cdot i(a) \neq \emptyset \Rightarrow \mathfrak{S}_{\exists\approx_2}(U,i)(\{a \approx a\}) = w$
$\mathfrak{S}_{\exists\approx_4}(U,i)(\{\forall x\{x \approx a\}\}) = w \Leftrightarrow \exists n \in U \subseteq N$
mit $\tilde{\Delta}(n) = \tilde{\Delta} \cdot i(a) = \{o\} \leq nb(\Delta)$
$\Rightarrow \tilde{\Delta} i(a) = \tilde{\Delta}\, i(a) = \{o\} \Leftrightarrow \mathfrak{S}_{\exists\approx_4}(U,i)(\{a \approx a\}) = w$
Symmetrie; Transitivität- $\mathfrak{S}_{\exists\approx_i}$-allgemeingültigkeit trivial.
Substituierbarkeit:
Sei für $a \in \exists \cup \forall$, $B \in \mathfrak{P}$ $\tilde{\Delta} \cdot i(a) = \tilde{\Delta} \cdot i(b) \neq \emptyset$ oder $\tilde{\Delta} \cdot i(a) = \tilde{\Delta} \cdot i(b) = \{o\}$;
$(\tilde{\Delta} \cdot i(a), B) \in R_{P_i} :\Leftrightarrow \mathfrak{S}_{\exists\approx_i}(U,i)(\{Ba\}) = w$ ist Relation
$\Rightarrow (\tilde{\Delta} i(a), B) \in R_{P_j}) (\tilde{\Delta} \cdot i(b), B) \in R_{P_i}$
also $\mathfrak{S}_{\exists\approx_2}(U,i)(\{\{a \approx b\} \wedge \{Ba\}\} \rightarrow \{Bb\}) = w$

2. a) Sei (U,i) Interpretation über Namen $,i(a), n \in U$

$\tilde{\Delta}\, i(a) = \{o_1, o_2\} \neq \{o_1\} = \tilde{\Delta}(n) > \tilde{\Delta}(n) \cap \tilde{\Delta}\cdot i(a) = \{o_1\} \neq \emptyset$

$> S_{Jp\approx 5}(U,i)(\{\forall x\{x \approx a\}\}) = w \neq S_{Jp\approx 5}(U,i)(\{a \approx a\}) = f$

b) wegen $\{a \approx a\}$ $S_{Jp\approx 1}$-Allgemeingültigkeit auch die Liberalisierung.

wegen $\tilde{\Delta}(n) \cap \tilde{\Delta}\cdot i(a) \neq \emptyset > \tilde{\Delta}\cdot i(a) \cap \tilde{\Delta}\cdot i(a) \neq \emptyset > S_{Jp\approx 3}$-Allgemeing.

wegen $\tilde{\Delta}(n) \cap \tilde{\Delta}\cdot i(a) \neq \emptyset$ oder $\tilde{\Delta}(n) = \tilde{\Delta}\cdot i(a) = \emptyset$

$> \tilde{\Delta}\cdot i(a) = \emptyset$ oder $\tilde{\Delta}\cdot i(a) \cap \tilde{\Delta}\cdot i(a) \neq \emptyset > S_{Jp\approx 4}$ Allgemeing.

Wenn also die Identitätsaussage selbst auf bestimmte Weise als Existenzvoraussetzungsbehaftet verstanden wird:

a) Identität im Sinne von extensionsgleich und nichtleer

b) Identität im Sinne von je genau ein denotat und das gemeinsam

dann ist nur die liberalisierte Form im Sinne der a),b) Deutung zuverlässig.

Allerdigs gibt es eine Existenzbehaftete Deutung

c) Identität im Sinne von Eindeutigkeit und Existenz eines gemeinsamen Denotats

unter der die Liberalisierung nicht allgemeingültig ist.

LITERATUR

M.A. Arbib, Theories of Abstract Automata
Prentice Hall Englewood Cliffs N.J. 1969

H.-D. Ebbinghaus, Jörg Flum, Wolfgang Thomas, Einführung in die mathematische Logik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1978

G. Lallement, Semigroups and Combinatorical Applications
New York 1979

H. Leblanc, Truthvalue Semantics for a Logic of Existence, Notre Dame Journal of Formal Logic Vol. XII Number 2, 1921

C. Lejewski, ATheorie of Non-Reflexive Identity and its Ontological Ramifications, in P. Weingartner (Hg.) Description, Analytizität und Existenz, Salzburg-München 1969

W. van Orman Quine, Ontological Relativity and Other Essays
Columbia U.P. 1969

Bei der Feldforschung

FORMALE ZUSAMMENFASSUNG

A. Definitorische Grundlagen

Ausdruckssysteme

Es seien Z,A,N,O Mengen; $\frown$,Δ Relationen.

Wenn wir Buchstaben unseres Alphabetes (Elemente aus A) hintereinanderschreiben, bekommen wir schriftliche Ausdrücke (Elemente aus Z) manche Ausdrücke sind (sinnvolle) Wörter unserer Sprache, manche Wörter sind Namen(wörter) (Elemente aus N).

Zwischen Namen und Objekten bzw Denotaten (Elementen aus O) besteht eine Namens- oder Bezeichnungsrelation (Δ).

Das Hintereinanderschreiben (von Buchstaben) ist eine assoziative Verknüpfung ($\frown$).

$(Z,\frown,A,N,\Delta,O)$ AUSDRUCKSYSTEM MIT NAMENSSIMULATION

1. $(Z,\frown)$ Halbgruppe ist ($\frown$ assoziative Verknüpfung auf Z)
2. A Erzeugendensystem von Z (jedes Element aus Z ist endliche Verknüpfung von Elementen aus A).
3. $N \subset Z$.
4. $\Delta \subset N \times O$.

Sei nun $(Z,\frown,A,N,\Delta,O)$ ebensolches.

Manche Namen sind eindeutig, manche mehrdeutig, manche leer, je nachdem ob sie genau ein, mehrere oder kein Denotat besitzen.

Für $n \in Z$ ist:

n LEERER (MEHRDEUTIGER, EINDEUTIGER) NAME:GDW

1. $n \in N$.
2. $\{o:(n,o) \in \Delta\} = \phi$ ($= \{o_1,o_2\}$: mit geeigneten, verschiedenen o_1,o_2 aus O; bzw $= \{o_1\}$).

Extensionsgleiche Namen sind Namen, die dieselben Objekte benennen.

Für $n,m \in Z$ ist:

n,m EXTENSIONSGLEICH (E NAMEN):GDW

1. $n,m \in Z$.
2. $\{o:(n,o) \in \Delta\} = \{o:(m,o) \in \Delta\}$.

Unter extensionsgleichen Ausdrücken verstehe ich solche, die sich bei Zerlegung in Ausdrücke einer Menge von Grundausdrücken (B) höchstens inentprechenden Stellen durch extensionsgleiche (zeichenverschiedene) Namen unterscheiden.

Für $B \subset Z$ gilt:

y,z EXTENSIONSGLEICH (E AUSDRÜCKE) ÜBER B:GDW

1. $y,z \in Z$.
2. Für $y = a_1 \frown \ldots \frown a_m$ und $z = b_1 \frown \ldots \frown b_m$ mit $a_i,b_j \in B$ gilt
   a) $n = m$
   b) $a_i \doteq b_i$ oder sie sind extensionsgleiche Namen.

Mengen aus Namen können wir einmal als extensiosgleich betrachten, wenn es zu jedem Namen in der einen Mengenbezeichnung einen extensionsgleichen Namen in der anderen gibt (E extensionsgleich), zum anderen können wir es, wenn jedes Denotat eines Namens in der einen Mengenbezeichnung, Denotat eines Namens in der anderen ist (V extensionsgleich), es müssen dann nicht alle Denotate eines Namens in der einen Bezeichnung unbedigt Denotate eines einzigen Namens in der anderen sein.

---

1) Unter den Elementen aus O stelle man sich Objekte vor die Denotate von Namen sind und iA inschriftlichen Äußerungen selbst gar nicht vorkommen. Wir kennen sie aufgrund unsrere Sprachkenntnis.

Für $L,M\subseteq Z$, $\mathfrak{Z}(n):=\{\alpha:(n,o)\in\Delta\}$ gilt:

L,M E EXTENSIONSGLEICH(E NAMENMENGEN):GDW
1. $L,M\subseteq N$. 2. $\{\mathfrak{Z}(n):n\in L\}=\{\mathfrak{Z}(n):n\in M\}$.

L,M V EXTENSIONSGLEICH(E NAMENMENGEN):GDW
1. $L,M\subseteq N$. 2. $\bigcup_{n\in L}\mathfrak{Z}(n)=\bigcup_{n\in M}\mathfrak{Z}(n)$.

Syntaktische Grundsymbolmenge

Werden syntaktische Festlegungen in der Metasprache formuliert, so werden dazu Grundsymbole verwendet, diese sind einmal selbst Zeichen, zumanderen Namen objektsprachlicher Zeichen. Wenn es ein Problem nichteindeutiger Namen gibt, dannalso auch hier. Die mithilfe der Gundsymbole festgelegten Eigenschaften müssen Wohldefiniert und eindeutig sein.
Da Eigenschaften wie Formel oder Aussage etc bzgl Zerlegungen von Grundsymbolkonkatenationen definiert werden müssen die festgelegten Mengen abgeschlossen bzgl sämtlichen Zerlegungen jeder solchen Konkatenation sein.
Davon unterschieden muß aber die Fordrung sein, daß die Eigenschaften für die Objektsprachlichen Zeichenreihen eindeutig sein sollen.
Dazu muß die Menge der Grundsymbolreihen, die zB durch die Definition von Aussage festgelegt ist, abgeschlossen sein bzgl (eventuel existierenden ,verschiedenen)Namen derselben objektsprachlichen Zeichenreihe.
Sei nun $\mathfrak{I}$ die Menge der Individuenkonstanten, $\mathfrak{P}$ die der Prädikatkonstanten, $\mathfrak{V}$ die der Individuenvariablen, $\neg,\vee,\rightarrow$ Negation, Adjunktion und Implikation, $\mathfrak{V}$ der Existenzquantor, $($, $)$ Klammern.
$\mathfrak{Fo}$ sei die Menge der Formeln, $\mathfrak{Au}$ die der Aussagen, $\mathfrak{Ax}$ die der Axiome und $\mathfrak{Ab}$ schließlich die der Ableitungen eines 2-wertigen prädikatenlogischen Kalküls, danngilt:

$(Z,\frown,A,N,\Delta,0,\mathfrak{I},\mathfrak{P},\mathfrak{V},\neg,\vee,\rightarrow,\mathfrak{V},(,),\mathfrak{Fo},\mathfrak{Au},\mathfrak{Ax},\mathfrak{Ab})$
SYNTAKTISCH ADÄQUAT FESTGELEGTER KALKÜL:GDW
1. $(\mathfrak{I},\mathfrak{P},\mathfrak{V},\neg,\vee,\rightarrow,\mathfrak{V},(,),\mathfrak{Fo},\mathfrak{Au},\mathfrak{Ax},\mathfrak{Ab})$ Kalkül 1.Stufe mit üblichen Festlegungen für die entsprechenden Mengen ist.
2. $(Z,\frown,A,N,\Delta,0)$ Ausdrucksystem mit Namenssimulationsmenge ist.
3. $B=\mathfrak{I}\cup\mathfrak{V}\cup\mathfrak{P}\cup\{\neg,\vee,\rightarrow,\mathfrak{V},(,)\}\subseteq Z$.
   Für $a_1\frown\ldots\frown a_m=b_1\frown\ldots\frown b_m$ mit $a_i,b_j\in B$, ist mit $a_1\frown\ldots\frown a_m$ stets auch $b_1\frown\ldots\frown b_m$ in $\mathfrak{Fo}$ bzw $\mathfrak{Au}$.
   Für $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathfrak{Ab}$ und x_j mit einer gemeinsamen Zerlegung mit z_j für jedes j, dannist auch $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathfrak{Ab}$.
4. $B=\mathfrak{I}\cup\mathfrak{V}\cup\mathfrak{P}\cup\{\neg,\vee,\rightarrow,\mathfrak{V},(,)\}\subseteq N$.
   Für $a_1\frown\ldots\frown a_m,b_1\frown\ldots\frown b_m$ extensionsgleich über B sind stets beide Formeln oder Aussagen
   Für $(z_1,\ldots,z_n)$ und $(v_1,\ldots,v_n)$ folgen extensionsgleicher Ausdrücke über B, sind stets beide Ableitungen.

Syntaktisch-interpretationssemantisches System

Die klassische Interpretationssemantik ordnet den Formeln des klassischen Kalküls Wahrheitswerte in Abhängigkeit von Interpretationen zu. Ich habe meinen Untersuchungen eine Verallgemeinerung der klassischen Interpretationssemantik zugrunde gelegt: anstatt der üblichen Zuordnung von Wahrheitswertverteilungen zu Interpretationen, fordere ich für eine Interpretationssemantik lediglich, daß sie

eine Relation (S) zwischen Interpretationen (n) und Wahrheitswerteverteilungen auf den Formeln des Kalküls enthält. ich untersuche Zuverlässigkeit und Vollständigkeit für verschiedene solche Relationen.

(∃,ℙ,∀,¬,∨,→,(,),Fo,Au,Ax,Ab,S,∃n,w,f,Z,⌢,A,N,Δ,0)
SYNTAKTISCH-INTERPRETATIONSSEMANTISCHES (SYN-ISEM) SYSTEM:GDW
1.(∃,ℙ,∀,¬,∨,→,∀,ℓ,),Fo,Au,Ax,Ab) Kalkül 1. Stufe.
2.∃n ={(U,i) :(U,i) (klassische) Interpretation für denKalkül}.
3.S⊆∃nx{s mit s:Fo→{w,f} Abbildung}.
4.w ≠f.
5.(Z,⌢,A,N,Δ,0) Ausdrucksystem mit Namenssimulation.

In den üblichen (klassischen) Interpretationsfestlegungen sind Bereich (U) und Bilder von Prädikatkonstanten Mengen, Bilder von Individuenzeichen Elemente des Bereichs. Ich untersuche Interpretationen bei denen der Bereich als Namenmenge gegeben ist, Bilder von Prädikatkonstanten ebenfals und Bilder von Individuenzeichen als Namen. Zwei solche Interpretationen ordnen denselben Zeichen dieselben Objekte zu, wenn sie sich in den Namen bzw Namenmengen ev. unterscheiden durch die die Bilder eines Zeichens gegeben sind nicht aber in den zugehörigen Extensionen derselben, ich nenne sie dann zielinvariante Interpretationen.
Da Mengen E und V extensionsgleich sein können ergeben sich hier vier Möglichkeiten, wenn nicht die Gleichbehandlung von Bereichsspezifikation vorausgesetzt wird.

Für α,β ∈ ∀,E und (∃,...0) Syn-Isem System gilt:
(U,i),(U',i') ∝β ZIELINVARIANTE INTERPRETATIONEN:GDW
1.(U,i),(U',i')∈∃n.
2.U, U' ∝ extensionsgleich.
3. Für P∈ℙ gilt i(P),i'(P) sind ∝extensionsgleich.
4. Für a∈∃∪∀ gilti(a),i'(a) sind extensionsgleich.

Vorkommende Namen werden für die Wahrheitswertezuordnung nur verwendet, wenn sie sich für zielinvariante Interpretationen nicht unterscheiden, dh wenn die Semantik für zielinvariante Interpretationen dieselben Wahrheitswerte für alle Formeln liefert. Nur dann werden vorkommende Namen extensional verwendet. Ein Syn-Isem System mit dieser Eigenschaft nenne ich zielextensional, dh extensional bzgl Namen die im Ziel, den Bildern vorkommen.

(∃,ℙ,∀,¬,∨,→,∀,ℓ,),Fo,Au,Ax,Ab,S,∃n,w,f,Z,⌢,A,N,Δ,0)
∝ ZIELEXTENSIONALES SYN-ISEM SYSTEM:GDW
1.(∃,...,0) Syn-Isem System.
2.für (U,i),(U',i') ∝β zielinvariante Interpretationen gilt (U,i)∈S gdw (U',i')∈S.

Vollständigkeit und Zuverlässigkeit lege ich relativ zu der semantischen Relation S wie üblich fest.

(∃,...,0) VOLLSTÄNDIGES SYN-ISEM SYSTEM:GDW
1.(∃,...,0) Syn-Isem System.
2.Wenn s(z)=w für ein z∈Fo, für alle ((U,i),s)∈S,
danngibt es $(z_1,...z_n,z)\in Ab$ mit $z_i\in Fo$.

(∃,...,0) ZUVERLÄSSIGES SYN-ISEM SYSTEM:GDW
1.(∃,...,0) Syn-Isem System.
2. Für $(z_1,...,z_n)\in Ab$ und ((u,i),s)∈S gilt $s(z_n)=w$.

Bezüglich der Eigenschaften Zielinvarianz, Vollstäandigkeit und Zuverlässigkeit habe ich folgende interpretations-semantischen Relationen (zusammen mit dem klassischen Kalkül) betrachtet: $S_{\mathfrak{I}K}$, $S_{\mathfrak{I}\in}$, $S_{\mathfrak{I}\subseteq}$, $S_{\mathfrak{I}\cap}$.

Für $(\mathfrak{N}, \ldots, O)$ Syn-Isem System gilt:

$S = S_{IK}$: GDW $S: \mathfrak{I}n \to \{s$ mit $s: \mathbf{F}o \to \{w, f\}$ Abbildung$\}$ Abbildung und
für $z \in \mathbf{F}o$ gilt $S((U,i))(z) = w$ gdw
z klassisch wahr unter (U,i), dh:
für $P \in \mathbf{P}$ und $a \in \mathfrak{I}\cup\mathbf{V}$ $S((U,i))(\langle Pa \rangle) = w$ gdw $i(a) \in i(P)$
für $v, z \in \mathbf{F}o$, $x \in \mathbf{V}$ $S((U,i))(\langle \neg v \rangle) = w$ gdw $S((U,i))(v) = f$
$S((U,i))(\langle v \vee z \rangle) = w$ gdw $S((U,i))(v) = w$ oder $S((U,i))(z) = w$
$S((U,i))(\langle v \to z \rangle) = w$ gdw $S((U,i))(v) = f$ oder $S((U,i))(z) = w$
$S((U,i))(\langle \bigvee x v \rangle) = w$ gdw es gibt ein $n \in \mathfrak{N}$ mit $S((U, i_x^n))(z) = w$, wobei
für $b = x$ $i_x^n(b) = n$
für $b \neq x$ $i_x^n(b) = i(b)$.

Die restlichen Relationen unterscheiden sich von dieser nur in den Wahrneitsbedingungen für die Prädikation und zulässigen Bereichen.

$S = S_{IP}$ $S: \{(U,i)$ mit (u,i) Interpretation und $U \subseteq N\} \to \{s$ mit $s: \mathbf{F}o \to \{w,f\}$ Abbildung$\}$ Abbildung
und für $v, z \in \mathbf{F}o$ und $x \in \mathbf{V}$ ist:
$S((U,i))(\langle \neg v \rangle)$, $S((U,i))(\langle v \to z \rangle)$, $S((U,i))(\langle v \vee z \rangle)$,
$S((U,i))(\langle \bigvee x v \rangle)$ wie für $S = S_{Ik}$
für a und P
und für $p = \in$ $S((U,i))((Pa)) = w$ gdw $\tilde{\Delta}(i(a)) \in \{\tilde{\Delta}(n) : n \in i(P)\}$
für $p = \subseteq$ gdw $\tilde{\Delta}(i(a)) \subseteq \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n)$
$p = \cap$ gdw $\tilde{\Delta}(i(a)) \cap \bigcup_{n \in i(P)} \tilde{\Delta}(n) \neq \emptyset$

Die klassische formale Identität

Ich habe verschiedene Whrheitswertfestlegungen für formale Identitätsaussagen betrachtet, wie oben für Interpretationen deren Bereich als Namenmenge gegeben ist. Bezüglich dieser Wahrheitswertfestlegungen habe ich Zuverlässigkeit und Vollständigkeit bei den üblichen syntaktischen Identitätseigenschaften untersucht.

$(\mathfrak{N}, \mathbf{P}, \mathbf{V}, \neg, \vee, \to, \bigvee, \langle, \rangle, =, \mathbf{F}o, \mathbf{A}u, \mathbf{A}x, \mathbf{A}b, S, \mathfrak{I}n, w, f, Z, \frown, A, N, \Delta, O)$
SYN-ISEM SYSTEM MIT IDENTITÄT: GDW

1. $(\mathfrak{N}, \mathbf{P}, \mathbf{V}, \neg, \vee, \to, \bigvee, \langle, \rangle, =, \mathbf{F}o, \mathbf{A}u, \mathbf{A}x, \mathbf{A}b)$ Kalkül 1. Stufe mit (totalrefexiver, symmetrischer, transitiver, substitutionsinvarianter) Identität.
2. ,3. ,4. ,5. wie für Syn-Isem System.

ZIELINVARANZ, VOLLSTÄNDIGKEIT UND ZUVERLÄSSIGKEIT für Syn-Isem Systeme mit Identität werden wie für Syn-Isem Systeme definiert.

Die folgenden Relationen S legen formale Identitätsaussagen als wahr fest, wenn zwischen den Bildern der Individuenzeichen der fo formalen Identitätsaussage Extensionsgleichheit besteht, wenn sie ein gemeinsames Denotat haben, wennsie genau ein gemeinsames Denotat haben, wennsie jeweils genau ein Denotat und das gemeinsam haben oder wenn sie zeichengleich sind.

Für $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ Syn-Isem System mit Identität, $(U,i)\in\mathfrak{I}n$, $a,b\in\mathfrak{I}\cup V$

$S=S_{I\approx L}$:GDW $S:\{(U,i): (U,i)\in\mathfrak{I}n$ und $U\subseteq N\}\to\{s$ mit $s:\mathfrak{Fo}\to\{w,f\}$ Abb.$\}$ Abbildung.

$S_{\to\alpha L}((U,i))(z)$ wie $S_{\to\beta}((U,i))(z)$ für z nicht $\{a\frown b\}$

$S_{I\approx 1}((U,i))(\{a\frown b\})=w$:gdw $\tilde{\Delta}(i(a))=\tilde{\Delta}(i(b))$

$S_{I\approx 2}((U,i))(\{a\frown b\})=w$:gdw $\tilde{\Delta}(i(a))\cap\tilde{\Delta}(i(b))\neq\emptyset$

$S_{I\approx 3}((U,i))(\{a\frown b\})=w$:gdw $\tilde{\Delta}(i(a))\cap\tilde{\Delta}(i(b))=\{o\}$

$S_{I\approx 4}((U,i))(\{a\frown b\})=w$:gdw $\tilde{\Delta}(i(a))=\tilde{\Delta}(i(b))=\{o\}$

$S_{I\approx 5}((U,i))(\{a\frown b\})=w$:gdw $/\ i(a)\ =\ i(b)$

B. Wichtige Ergebnisse

Zu Ausdrucksystemen

A1. $(Z,\hat{},A,N,\Delta,0)$ Ausdruckssytem mit Namenssimulation mit $B\subseteq Z$
Wenn für jedes $b\in B$ und $z\in Z$ $b\hat{}z\in B$, dann gilt
$a_1\hat{}\ldots\hat{}a_n\neq b_1\hat{}\ldots\hat{}b_m$, mit $a_i,b_j\in B$, nur für $n=m$ und $a_i\neq b_i$.

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist also die Zerlegung jedes Ausdruckes (jeder Konkatenation von Zeichen) in Symbole aus der Menge B eindeutig, dh sie ist eindeutig, wenn kein Element der Grundmenge B rechte Verlängerung eines anderen Elementes aus B mit irgendeinem Zeichen aus Z.

Diese Aussage gilt analog bzgl linken Verlängerungen.

Zu syntaktischen Alphabeten

S1. $(\mathfrak{I},\mathfrak{P},\forall,\neg,\vee,\to,\exists,\{,\},\mathfrak{Fo},\mathfrak{Au},\mathfrak{Ax},\mathfrak{Ab})$ Kalkül 1. Stufe und, dann ist
a) für $\mathfrak{P}\cup\mathfrak{I}\cup V\cup\{\neg,\vee,\to,\exists,\{,\}\}\subseteq Z$ und $(Z,\hat{},A,N,\Delta,0)$ Ausdrucksytem $\mathfrak{Fo},\mathfrak{Ax}\subseteq Z$ und $\mathfrak{Ab}\subseteq\{(z_1,\ldots,z_n)$ mit $z_i\in Z\}$.
b) Aber diese Ergebnisse sind nicht ausreichend:
$\{$STADTWALD MÜNCHEN$\}=\{\hat{}$STADT$\hat{}$WALD MÜNCHEN$\hat{}\}$ ist Aussage
für STADT$\in\mathfrak{P}$ und WALD MÜNCHEN$\in\mathfrak{I}$.
$=\{\hat{}$STADTWALD$\hat{}$MÜNCHEN$\}$ ist keine Aussage
für STADTWALD$\in\mathfrak{I}$ und MÜNCHEN$\in\mathfrak{I}$.
Wenn also alle vier Ausdrücke Grundzeichen sind, verletzt dieses Alphabet keine der üblichen Bedingungen und ist dennoch inadäquat.

S2. Unter den Voraussetzungen von Ergebnis A1. mit $\mathfrak{I}\cup\forall\cup\mathfrak{P}\cup\{\neg,\vee,\to,\exists,\{,\}\}=B$ sind natürlich alle Formeln und Aussagen des Kalküls von oben eindeutig zerlegbar. Wie das Beispiel aus S1. b) zeigt, ist dafür weder die Verschiedenheit der Grundsymbole noch ihre unzerlegbarkeit in Grundsymbole ausreichend.

S3. Bei eindeutiger Zerlegbarkeit von Grundsymbolkonkatenationen in Grundsymbole (S2.- Voraussetzung also) und $\mathfrak{I}\cup\forall\cup\mathfrak{P}\cup\{\neg,\vee,\to,\exists,\{,\}\subseteq N$, die Grundsymbole also Namen (von Zeichen) sind, gilt:
Die Menge der Aussagen ($\mathfrak{Au}$), die Menge der Formeln ($\mathfrak{Fo}$) sind abgeschlossen bzgl extensionsgleichen Ausdrücken, dh bzgl eventuel verschiedenen metasprachlichen Namen derselben Objektsprachlichen Zeichenreihen,
genau dann, wenn in $\mathfrak{I}\cup\forall\cup\mathfrak{P}\cup\{\neg,\vee,\to,\exists,\{,\}\}$ keine verschiedenen extensionsgleiche Namen vorkommen, dh keine verschiedenen metasprachlichen Zeichennamen dasselbe objektsprachliche Zeichen bezeichnen, ein Name für kein Zeichen ist durchaus zulässig.

Zu syntaktisch-interpretationssemantischen Systemen

Welche Eigenschaften muß die Menge aller Namen haben, damit unter den einzelnen semantischen Relationen S, zu zielinvarianten Interpretationen dieselben Wahrheitswertverteilungen gehören, damit also die Wahrheitswertverteilungen rein extensionsabhängig festgelegt, die Semantiken zielextensional sind?

Für $(\mathfrak{I},\mathfrak{P},\forall,\neg,\vee,\rightarrow,V,(,),Fo,Au,Ab,S,\mathfrak{I}n,w,f,Z,\hat{},N,\triangleq,0)$ Syn-Isem System gilt:

SIS1. Für $S \approx S_{\mathfrak{I}K}$ gilt:
- a) $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ EE, E V, $\forall$E und $\forall$V zielextensional nur, wenn es keine extensionsgleichen Namen gibt in N, nicht leere oder mehrdeutige Namen sind das Problem.
- b) $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ EE, E V, $\forall$E und $\forall$V zielextensional, wenn es keine V extensionsgleichen verschiedenen Namenmengen gibt $(M,M'$ V extensionsgleich, nur für $M \neq M')$.
- c) $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ E V zielextensional nur, wennes keinen leeren Namen gibt in N (für EE zielexxtensional ist einer zugelassen).

SIS2. Für jede Namenmenge N gilt jedoch:
- a) Für $S \approx S_{\mathfrak{I}\varepsilon}$, $S \approx S_{\mathfrak{I}\subseteq}$, und $S \approx S_{\mathfrak{I}\cap}$ ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ EE zielextensional.
- b) Für $S \approx S_{\mathfrak{I}\subseteq}$ und $S \approx S_{\mathfrak{I}\cap}$ ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ E V zielextensional.

SIS3. Betrachten wir die Enschränkungen von $S_{\mathfrak{I}K}$ auf die $(U,i)\in\mathfrak{I}n$, für die $U\subseteq N$, so gilt folgende Übereistimmung für dieses $S^{*}_{\mathfrak{I}K}$:
- a) $S^{*}_{\mathfrak{I}K} \approx S_{\mathfrak{I}\varepsilon}$ gdw N keine extensionsgleichen (verschiedenen) Namen enthält.
- b) $S^{*}_{\mathfrak{I}K} \approx S_{\mathfrak{I}\subseteq}$ gdw N eine Teilmenge enthält, in der jeder Name ein Denotat mit keinem anderen Namen gemeinsam hat, ein Extensionen-Repräsentantensytem besitzt.
- c) $S^{*}_{\mathfrak{I}K} \approx S_{\mathfrak{I}\cap}$ gdw N keine extensionsgleichen und keine leeren Namen enthält.

Zuverlässigkeit oder Vollständigkeit gilt unter folgenden Bedingungen (nicht) für die einzelnen Relationen S.

SIS4. Wenn es soviele verschiedene Namen(wörter) wie Individuen-Zeichen gibt, also ein $F\subseteq N$ mit $R\equiv\mathfrak{I}\cup\forall$, und
- a) R ohne extensionsgleiche Namen ist, dann ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ für $S \approx S_{\mathfrak{I}\varepsilon}$ vollständig.
- b) R ein Extensionen-Repräsentantensystem (vgl SIS3c) besitzt, dann ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ für $S \approx S_{\mathfrak{I}\subseteq}$ vollständig.
- c) R nur extensionsdisjunkte, nichtleere Namen enthält, dann ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ für $S \approx S_{\mathfrak{I}\cap}$ vollständig.

SIS5. Wenn $\{\tilde{\Delta}(n)$ mit $n\in N\}$ endlich ist und für jedes R isomorph zu $\mathfrak{P}$ gilt:
- a) $R\not\in\mathfrak{P}(\{\tilde{\Delta}(n)$ mit $n\in N\})$, dh weniger Mengen von Namenextensionen als Prädikatkonstanten vorhanden sind, dann ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ für $S \approx S_{\mathfrak{I}\varepsilon}$ nicht vollständig.
- b) $R\not\in\mathfrak{P}(\bigcup_{n\in M}\tilde{\Delta}(n)$ mit $M\subseteq N)$, dh weniger Denotatmengen von Namenmengen gibt als Prädikatkonstanten, dann ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ für $S \approx S_{\mathfrak{I}\cap}$ nicht vollständig.
- c) $R\not\in\mathfrak{P}(N)$, dh weniger Mengen von Namen als Prädikatkonstanten gibt, dann ist $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ für $S \approx S^{*}_{\mathfrak{I}K}$ nicht vollständig.

SIS6. $(\mathfrak{I},\ldots,0)$ ist zuverlässig für $S \approx S_{\mathfrak{I}\varepsilon}$, $S \approx S_{\mathfrak{I}\cap}$ und $S \approx S_{\mathfrak{I}\subseteq}$.

Zu Quines Kriterium

Quines Kriterium für die Verwendung eines Namens als nichtleeren Namen in einer Theorie lautet in meiner Symbolisierung:

$\langle\langle \bigvee x \langle x \equiv a \rangle\rangle.$

Es soll ein Kriterium "für die Verwendung von a um ein Objekt zu benennen" sein. Es steht hinter der Liberalisierung des klassischen Kalküls mit Identität, in dem das Totalreflexivitätsaxiom ($\langle a \equiv a \rangle$; für $a \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{V}$) liberalisiert wird zu $\langle\langle \bigvee x \langle x \equiv a\rangle\rangle \rightarrow \langle a \equiv a \rangle\rangle$.

SIQ1. Es handelt sich hierbei tatsächlich um eine Liberalisierung, da für $\Delta(i(a)) = \emptyset$ $S_{3p\equiv q}((U,i))(\langle a \equiv a \rangle) = f$ gilt
$S_{3p\equiv q}((U,i))(\langle\langle \bigvee x \langle x \equiv a \rangle\rangle \rightarrow \langle a \equiv a \rangle\rangle) = w$
für alle (U,i), mit $U \in N$ (allgemeingütig) ist.

SIQ2. Aber es ist keine Existenz-Voraussetzungs-Befreiung, weil
a) auch für $\Delta(i(a)) = \emptyset$, $S_{3p\equiv 1}((U,i))(\langle a \equiv a \rangle) = w$,
b) nicht für alle $(U,i) \in \mathfrak{J}n$, mit $U \in N$
$S_{3p\equiv 3}((U,i))(\langle\langle \bigvee x \langle x \equiv a \rangle\rangle \rightarrow \langle a \equiv a \rangle\rangle) = w$ sein muß,
obwohl, wenn $S_{3p\equiv 3}((U,i))(\langle a \equiv a \rangle) = w$ gilt, $\Delta(i(a)) \neq \emptyset$ ist.

Die Ergebnisse sind also Abhängig davon, ob wir uns für die eine oder andere der Wahrheitswertebedingungen bei extensional beliebigen Namen in Interpretationen entscheiden, die die Quinesche Auffassung stützende Variante erscheint mir dabei nicht intuitiver als die anderen.

LEBENSLAUF

1949 13. Juni, geboren in Kirchheim/N,Württembg.

1956 Grunschule in Kirchheim/N

1960 Alfred Amann-Progymnasium Bönnigheim

1964 Gymnasium Bietigheim

1968 Erlangung der Hochschulreife in Bietigheim
Beginn des Studiums an der Universität München

1973 Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien, für die Fächer Mathematik und Chemie, Zulassungsarbeit bei Herrn Professor Schütte zum Thema :Gruppentheoretische Egenschaften eines dreidimensionalen, vollelliptischen Raumes.

1973 Studium der Wissenschschaftstheorie und Philosophie , Seminare und Vorlesungen bei den Herren Professoren Drömmer, Hinst, Link, Puntel, Röd und Stegmüller.

1978 Mitarbeit an einem Forschungsprojekt zur Spinnenorientierung im SFB Kybernetik am Max-Planck-Institut für Verhaltensforschung in Seewiesen Unter Leitung von Herrn Professor Mittelstaedt.

profi-druck
Adalbertstr. 10
8000 München 40